

BÀI TẬP Củng Cố PHẦN 8 – 9 – 10 ĐIỂM
TRONG ĐỀ THI THPTQG MÔN TOÁN 2017

Chi tiết xem thêm tại <http://estudy.edu.vn>

1. HÀM SỐ

1.1. Cực trị của hàm số

a. Hàm bậc 3:

Ví dụ 1: Hàm số $y = f(x)$ có $f'(x) = x(x-1)^2(x+1)^3$ có bao nhiêu cực trị

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Hướng dẫn: $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm nhưng không đổi dấu qua nghiệm $x=1$ vì đây là nghiệm bội chẵn. Vậy $f'(x)$ đổi dấu qua hai nghiệm còn lại nên hàm số có 2 cực trị.

Ví dụ 2: Hàm số $y = \sqrt[3]{x^2} - x$ có bao nhiêu cực trị

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Hướng dẫn: TXĐ: $\mathbb{R}$

Có $y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{2 - 3\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}$. Bây giờ ta xét dấu y' cần lưu ý xét dấu cả tử và mẫu của nó.

Thấy nghiệm của tử là $x = \frac{8}{27}$ và nghiệm của mẫu $x = 0$ và y' đổi dấu qua cả 2 giá trị này.

Dù y' không xác định tại $x=0$ nhưng hàm số vẫn xác định tại 0 nên đây vẫn là cực trị nhé!

Ví dụ 3: Tìm m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + (m-1)x + 5$ đạt cực đại tại $x=1$

- A. $m=2$ B. $m=-2$ C. $m \geq 2$ D. $m \in \emptyset$

Hướng dẫn: Đối với hàm bậc 3, hàm số đạt cực đại tại $x=1 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m > 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m \in \emptyset$

Ví dụ 4: Tìm điều kiện của m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + (m+1)x - m + 4$ có cực trị

$$\text{A. } \frac{3-\sqrt{21}}{2} < m < \frac{3+\sqrt{21}}{2} \quad \text{B. } \begin{cases} m > \frac{3+\sqrt{21}}{2} \\ m < \frac{3-\sqrt{21}}{2} \end{cases} \quad \text{C. } m > \frac{3+\sqrt{21}}{2} \quad \text{D. } m < \frac{3-\sqrt{21}}{2}$$

Hướng dẫn: Có $y' = 3x^2 - 2mx + m + 1$. Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow y'$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{3+\sqrt{21}}{2} \\ m < \frac{3-\sqrt{21}}{2} \end{cases}$$

Ví dụ 5: Biết rằng có hai giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x + 5$ có hai cực trị

x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 26$ là m_1 và m_2 . Giá trị của $|m_1 - m_2|$ bằng:

$$\text{A. } \frac{11}{2} \quad \text{B. } \frac{1}{2} \quad \text{C. } 1 \quad \text{D. } \frac{3}{2}$$

Hướng dẫn: Có $y' = x^2 - 2mx + m + 2$. Hàm số có hai cực trị thì điều kiện là $m^2 - m - 2 > 0$ (cứ để đấy!). Có $x_1^2 + x_2^2 = 26 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 26 \Leftrightarrow 4m^2 - 2(m+2) = 26$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 2m - 30 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -\frac{5}{2} \end{cases} \text{ . Vậy } |m_1 - m_2| = \frac{11}{2}$$

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = 2x^3 + ax^2 - 12x - 13$. Tìm a để đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu sao cho chúng cách đều trục tung.

$$\text{A. } a > 0 \quad \text{B. } a = 0 \quad \text{C. } a = 2 \quad \text{D. } a \in \emptyset$$

Hướng dẫn: Gọi hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là A, B . Khi đó, A, B cách đều Oy khi AB song song với Oy (loại) hoặc Oy đi qua trung điểm của AB.

Có $y' = 6x^2 + 2ax - 12$ có hai nghiệm phân biệt với mọi a nên hàm số luôn có 2 cực trị.

Trung điểm I của AB là điểm uốn của đồ thị nên giải $y'' = 0 \Leftrightarrow x_I = -\frac{a}{6}$. Điểm I $\in$ Oy

$$\Leftrightarrow x_I = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Ví dụ 7: Cho hàm số $y = x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + \frac{1}{2}m^3$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có các điểm cực đại, cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $d: y = x$.

- A. $m \in \{0; \pm\sqrt{2}\}$ B. $m \in \{\pm\sqrt{2}\}$ C. $m = \sqrt{2}$ D. $m \in \emptyset$

Hướng dẫn: Ta có thể kiểm tra điều kiện có cực trị sau.

Gọi A, B là 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số, A và B đối xứng qua $d \Leftrightarrow$ hai điều kiện sau cùng thoả mãn:

+ d đi qua trung điểm của AB, do đó đi qua điểm uốn I của đồ thị hàm số.

+ $d \perp AB \Leftrightarrow k_d \cdot k_{AB} = -1$ (tích hệ số góc)

Giải $y'' = 0$ tìm được tọa độ điểm uốn $I(\frac{m}{2}; \frac{m^3}{4})$. Thay tọa độ I vào phương trình đường d ta

$$\text{được } \frac{m}{2} = \frac{m^3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 (l) \\ m^2 = 2 \end{cases}.$$

Lấy $f(x)$ chia cho $f'(x)$ được dư là: $-\frac{m^2}{2}x + \frac{m^3}{2}$. Vậy đường thẳng qua 2 điểm cực trị là

$$y = -\frac{m^2}{2}x + \frac{m^3}{2}$$

$$\text{Điều kiện } d \perp AB \Leftrightarrow -\frac{m^2}{2} \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow m^2 = 2$$

Vậy $m = \pm\sqrt{2}$ thoả mãn cả hai điều kiện. Kiểm tra điều kiện có 2 nghiệm phân biệt của y' là $m \neq 0$ được thoả mãn.

Ví dụ 8: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m^2x + m$ có các điểm cực đại, cực tiểu đối xứng nhau qua đường thẳng $x - 2y - 5 = 0$.

- A. $\begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}$ B. $m = 0$ C. $m = -1$ D. $m \in \emptyset$

Hướng dẫn:

Gọi A, B là 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số, A và B đối xứng qua $d \Leftrightarrow$ hai điều kiện sau cùng thoả mãn:

+ d đi qua trung điểm của AB, do đó đi qua điểm uốn I của đồ thị hàm số.

$$+ d \perp AB \Leftrightarrow k_d \cdot k_{AB} = -1 \text{ (tích hệ số góc)}$$

Giải $y'' = 0$ tìm được tọa độ điểm uốn $I(1; m^2 + m - 2)$. Thay tọa độ I vào phương trình

$$\text{đường d ta được } -2m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -1 \end{cases}.$$

Lấy $f(x)$ chia cho $f'(x)$ được dư là: $\left(\frac{2}{3}m^2 - 2\right)x + \frac{1}{3}m^2 + m$. Vậy đường thẳng qua 2 điểm

$$\text{cực trị là } y = \left(\frac{2}{3}m^2 - 2\right)x + \frac{1}{3}m^2 + m$$

$$\text{Điều kiện } d \perp AB \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}m^2 - 2\right) \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow m^2 = 0$$

Vậy $m = 0$ thỏa mãn cả hai điều kiện. Kiểm tra điều kiện có 2 nghiệm phân biệt của y' khi $m = 0$ được thỏa mãn.

Ví dụ 9: Từ bảng biến thiên sau, hãy chỉ ra số cực trị của hàm số

x	-2	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-	+
$f(x)$				
		2		$+\infty$
	-3		$-\infty$	$-\infty$

A. 2

B. 1

C. 0

D. 3

Hướng dẫn: Từ bảng biến thiên thấy $f'(x)$ đổi dấu qua $x = 0$ và $x = 1$ nhưng hàm số chỉ xác định tại $x = 0$ nên hàm số có 1 cực trị tại $x = 0$.

Ví dụ 10: Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = |x - 2|(x^2 - 1)$

A. 0

B. 1

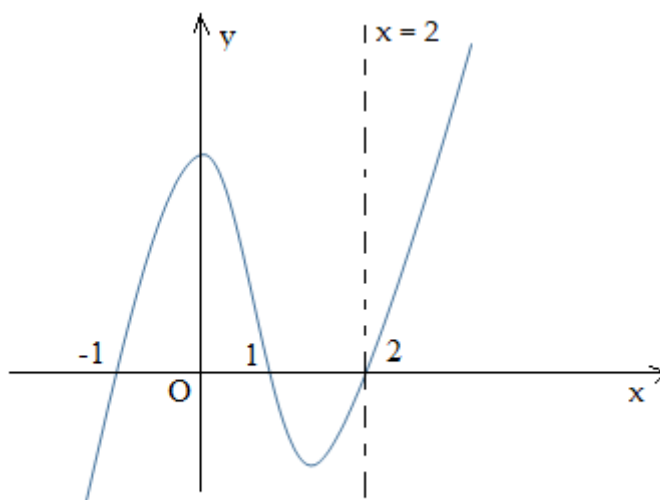
C. 2

D. 3

Hướng dẫn:

Cách 1: Chia làm hai trường hợp $x \geq 2$ và lập bảng biến thiên của hàm số trên miền $[2; +\infty)$. Tương tự lập bảng biến thiên của hàm số trên $(-\infty; 2)$. Ghép 2 bảng biến thiên lại ta được bảng biến thiên của hàm số trên $\mathbb{R}$. Từ đó chỉ ra số cực trị của hàm số.

Cách 2: (Suy đồ thị) Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = f(x) = (x-1)(x^2-1)$. Không cần vẽ chính xác, phác hoạ đồ thị của nó như hình 1.



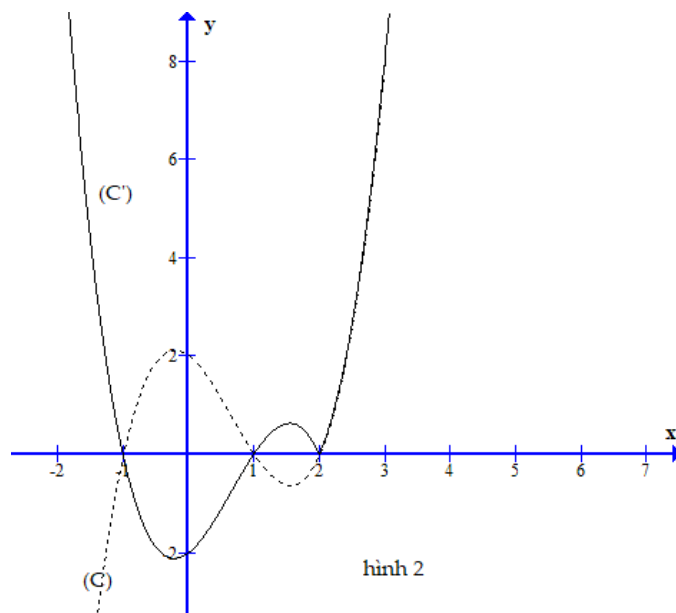
hình 1

Gọi (C') là đồ thị hàm số $y = |x-2|(x^2-1)$, ta thấy:

+ (C') trùng với (C) trên miền $x \geq 2$ vì phương trình giống nhau, nên đồ thị của (C) ở bên phải đường $x = 2$ giữ nguyên cho (C').

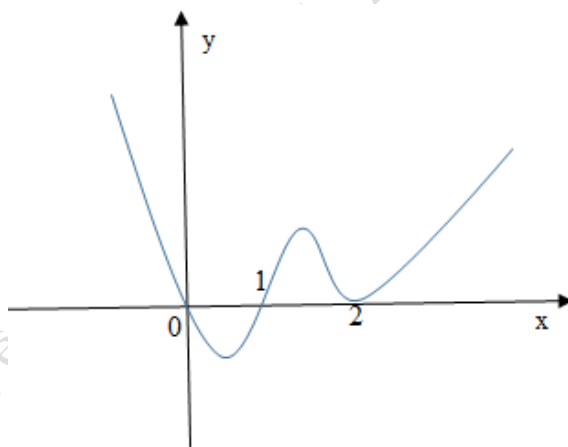
+ Với $x < 2$ thì (C') có phương trình $y = -f(x)$ nên (C') đối xứng với (C) qua Ox ở bên trái đường $x = 2$ nên (C') được vẽ bằng cách lấy đối xứng (C) ở phần này qua Ox.

Đồ thị (C') theo cách đó vẽ thành hình 2.



Từ đây thấy hàm số có 3 cực trị.

Ví dụ 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị của $y = f'(x)$ như hình sau. Xác định số cực trị của hàm $y = f(x)$



A. 3

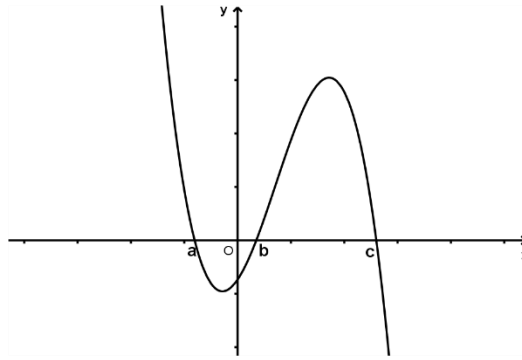
B. 4

C. 2

D. 1

Hướng dẫn: Hình đã cho là đồ thị hàm $y = f'(x)$. Do đó, phần đồ thị nằm phía trên Ox làm cho $y > 0$ tức $f'(x) > 0$ và đồ thị nằm dưới Ox tương ứng với $f'(x) < 0$. Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(x)$ chỉ đổi dấu qua 2 nghiệm $x = 0; x = 1$ mà không đổi dấu qua nghiệm $x = 2$. Vậy hàm số chỉ có 2 cực trị.

Ví dụ 12: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ cắt trục Ox tại ba điểm có hoành độ $a < b < c$ như hình vẽ.



Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $f(a) > f(b) > f(c)$.

B. $f(c) > f(b) > f(a)$.

C. $f(c) + f(a) - 2f(b) > 0$.

D. $(f(b) - f(a))(f(b) - f(c)) < 0$.

Hướng dẫn: Tương tự ví dụ 11, ta lập được bảng biến thiên của $y = f(x)$:

x	$-\infty$	a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$		$f(a)$		$f(b)$		$f(c)$		
								

Vậy $f(a) > f(b)$ và $f(c) > f(b) \Rightarrow f(a) + f(c) > 2f(b)$

b. Hàm bậc 4 trùng phương

Ví dụ 1: Tìm điều kiện m để hàm số $y = x^4 - (m+1)x^2 + m - 1$ có 3 cực trị

A. $m \geq -1$

B. $m > -1$

C. $m < 1$

D. $m < -1$

Hướng dẫn: Điều kiện hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có 3 cực trị là $ab < 0$

$\Leftrightarrow -(m+1) < 0 \Leftrightarrow m > -1$

Ví dụ 2: Tìm m để hàm số $y = mx^4 - (m-1)x^2 + 2$ có đúng một cực đại

A. $m = 0$

B. $m < 0$

C. $m > 1$

D. $0 \leq m < 1$

Hướng dẫn: Xét riêng trường hợp $m = 0$, đồ thị hàm số là Parabol có hệ số $a > 0$ nên có đúng một cực tiểu. Vậy $m = 0$ không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Với $m \neq 0$, hàm số có đúng một cực đại không có cực tiểu khi $\begin{cases} a < 0 \\ ab \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b \leq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -(m-1) \leq 0 \end{cases} \text{ (vn) .}$$

Trường hợp còn lại làm hàm số có đúng 1 cực đại nhưng có 2 cực tiểu còn lại $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ ab < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ (-m+1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = x^4 + 8mx^3 + 3(1+2m)x^2 - 4$. Tìm m để hàm số chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $\frac{1-\sqrt{7}}{6} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{6}$

B. $\begin{cases} \frac{1-\sqrt{7}}{6} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{6} \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$

C. $m \in \mathbb{R}$

D. $m = -\frac{1}{2}$

Hướng dẫn: Có $y' = 4x^3 + 24mx^2 + 6x(1+2m)$. $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 + 12mx + 3(1+2m) = 0 (*) \end{cases}$

Do $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = +\infty$ nên hàm số chỉ có một cực tiểu mà không có cực đại tương đương với hàm số chỉ có một cực trị, hay phương trình $y' = 0$ có nghiệm duy nhất mà y' đổi dấu quá nghiệm đó. Điều này tương đương với (*) có nghiệm kép (bất kể nghiệm kép có bằng 0 hay không) hoặc vô nghiệm, hoặc (*) có 1 nghiệm bằng 0 (nghiệm còn lại bất kể khác 0 hay

không). Hay $\Delta' \leq 0$ hoặc (*) thay có nghiệm $x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1-\sqrt{7}}{6} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{6} \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$.

Ví dụ 4: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m + m^4$ có 3 cực trị mà 3 điểm cực trị tạo thành tam giác

a. Đều

b. Vuông cân

c. Có diện tích bằng 32

e. Bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

d. Tạo với O tứ giác OBAC là hình thoi

f. Nhận $H(0; -1)$ làm trực tâm.**Hướng dẫn:** Chỉ cần nhớ hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có 3 cực trị $\Leftrightarrow ab < 0$.Khi đó, 3 điểm cực trị của đồ thị hàm số có tọa độ là: $A(0; c)$, $B\left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$ $= \left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}; -\frac{b^2}{4a} + c\right)$ và $C\left(-\sqrt{\frac{-b}{2a}}; \frac{-\Delta}{4a}\right) = \left(-\sqrt{\frac{-b}{2a}}; -\frac{b^2}{4a} + c\right)$. Tam giác ABC luôn cân tại A.a. Tam giác ABC đều $\Leftrightarrow AB = BC \Leftrightarrow -\frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} = 4\frac{-b}{2a} \Leftrightarrow \boxed{24a + b^3 = 0} \Leftrightarrow 24 - 8m^3 = 0$
 $\Leftrightarrow m = \sqrt[3]{3}$.b. Tam giác ABC vuông cân $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{8a + b^3 = 0} \Leftrightarrow 8 - 8m^3 = 0$
 $\Leftrightarrow m = 1$ c. Có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}; -\frac{b^2}{4a}\right) \\ \overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{\frac{-b}{2a}}; -\frac{b^2}{4a}\right) \end{cases} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} \sqrt{\frac{-b}{2a}} & -\frac{b^2}{4a} \\ -\sqrt{\frac{-b}{2a}} & -\frac{b^2}{4a} \end{vmatrix} \right| = \frac{b^2}{4|a|} \sqrt{\frac{-b}{2a}} \Rightarrow \boxed{32a^3 S^2 + b^5 = 0}$
 $\Leftrightarrow 32.32^2 - 32m^5 = 0 \Leftrightarrow m = 4$ d. Tứ giác OBAC là hình thoi $\Leftrightarrow OBAC$ là hình bình hành (do có 2 cạnh bên bằng nhau) $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} \Leftrightarrow A = B + C \Leftrightarrow c = \frac{-b^2}{4a} + c + \frac{-b^2}{4a} + c \Leftrightarrow \boxed{b^2 = 2ac} \Leftrightarrow 4m^2 = 2m + 2m^4$ $\Leftrightarrow m^3 - 2m + 1 = 0$ (do $m > 0$) $\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

e. Do tam giác ABC cân tại A nên $R = \frac{(\text{canh bên})^2}{2.AH} = \frac{AB^2}{2AH}$. Với H là trung điểm của BC nên

$$\overrightarrow{AH} = \left(0; -\frac{b^2}{4a}\right). \text{ Vậy } R = \frac{-\frac{b}{2a} + \frac{b^4}{16a^2}}{2 \cdot \frac{b^2}{4|a|}} = \frac{b^4 - 8ab}{16a^2} \cdot \frac{2|a|}{b^2} = \frac{b^3 - 8a}{8b|a|} = \frac{-8m^3 - 8}{-16m} = \frac{m^3 + 1}{2m}. \text{ Theo}$$

$$\text{giả thiết } R=1 \Leftrightarrow m^3 + 1 = 2m \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

1.2. Điều kiện đồng biến, nghịch biến

a. Hàm bậc 3

Ví dụ 1: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx - 1$. Tìm m để hàm số:

1) Đồng biến trên tập xác định

Đáp số: $m \geq 1$

Hướng dẫn: Có $y' = 3x^2 - 6x + 3m$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9 - 9m \leq 0$

$$\Leftrightarrow m \geq 1$$

2) Nghịch biến trên tập (0;3)

Đáp số: $m \leq -3$

Hướng dẫn: Hàm số biến trên tập (0;3) $\Leftrightarrow y' \leq 0 \forall x \in [0;3] \Leftrightarrow m \leq -x^2 + 2x, \forall x \in [0;3]$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{[0;3]} (-x^2 + 2x) \Leftrightarrow m \leq -3$$

3) Đồng biến trên tập $(2;+\infty)$

Đáp số: $m \geq 0$

Hướng dẫn: Hàm số đồng biến trên tập $(2;+\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0 \forall x \in [2;+\infty) \Leftrightarrow m \geq -x^2 + 2x$

$$\forall x \in [2;+\infty) \Leftrightarrow m \geq \max_{[2;+\infty)} (-x^2 + 2x) \Leftrightarrow m \geq 0$$

Ví dụ 2: Tìm m để hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$ đồng biến trên $(2;+\infty)$

Đáp số: $m \geq \frac{2}{3}$

Hướng dẫn: Có $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$. Hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow y' \geq 0 \forall x \in [2;+\infty) \Leftrightarrow m \geq \frac{6-2x}{x^2-2x+3} \forall x \in [2;+\infty) \Leftrightarrow m \geq \max_{[2;+\infty)} \frac{6-2x}{x^2-2x+3} \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}.$$

Chú ý: Nếu cô lập được m thì không cần xét trường hợp $m = 0$ ở hệ số bậc ba nữa.

Ví dụ 3: Cho hàm số $y = x^3 + (m-1)x^2 + (m^2-4)x + 9$. Tìm m để hàm số luôn luôn đồng biến trên tập xác định.

Đáp số:
$$\begin{cases} m \geq \frac{-1+3\sqrt{3}}{2} \\ m \leq \frac{-1-3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Hướng dẫn: $\Delta_{y'} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{-1+3\sqrt{3}}{2} \\ m \leq \frac{-1-3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

Ví dụ 4: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$. Tìm m để hàm số nghịch biến trên tập có độ dài bằng 1

Đáp số: $m = \frac{9}{4}$

Hướng dẫn: Có $y' = 3x^2 + 6x + m$. Nếu y' có $\Delta \leq 0$ thì hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó hàm số không có khoảng nghịch biến.

Với $\Delta > 0$ hàm số có khoảng nghịch biến là $(x_1; x_2)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của y' . Theo giả thiết, khoảng nghịch biến của hàm số có độ dài bằng 1 tương đương với $|x_1 - x_2| = 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 1$
 $\Leftrightarrow \sqrt{36 - 12m} = 3 \Leftrightarrow m = \frac{9}{4}$.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y = 2x^3 + 3mx^2 - 2m + 1$. Tìm m để hàm số nghịch biến trên $(1; 2)$.

Đáp số: $m \leq -2$

Hướng dẫn: Có $y' = 6x^2 + 6mx$, hàm số nghịch biến trên $(1; 2) \Leftrightarrow y' \leq 0 \quad \forall x \in [1; 2]$
 $\Leftrightarrow m \leq -x, \forall x \in [1; 2] \Leftrightarrow m \leq \min_{[1; 2]}(-x) \Leftrightarrow m \leq -2$

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2m(2m-1)$. Tìm m để hàm số đồng biến trên $(2; +\infty)$

Đáp số: $-2 \leq m \leq \frac{3}{2}$

Hướng dẫn: Ta có $y' = 3x^2 - 2(m+1)x - (2m^2 - 3m + 2)$, thấy $\Delta = 7(m^2 + m + 1) > 0 \quad \forall m$. Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; x_1)$ và $(x_2; +\infty)$.

Hàm số đồng biến trên $(2; +\infty) \Leftrightarrow (2; +\infty) \subset (x_2; +\infty)$ hay $x_1 < x_2 \leq 2$. Điều kiện này tương

đương với $\begin{cases} (x_1 - 2) + (x_2 - 2) \leq 0 \\ (x_1 - 2)(x_2 - 2) \geq 0 \end{cases}$. Dùng định lý Viet giải hệ bất phương trình ẩn m được

$$-2 \leq m \leq \frac{3}{2}.$$

Ví dụ 7: Tìm m để hàm số $y = mx^3 - mx^2 + (m+1)x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Đáp số: $m \geq 0$

Hướng dẫn:

Cách 1: Có $y' = 3mx^2 - 2mx + m + 1$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $y' \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq \frac{-1}{3x^2 - 2x + 1}$

. Lập bảng biến thiên của hàm $g(x) = \frac{-1}{3x^2 - 2x + 1}$ ta thấy $m \geq 0$.

Cách 2: Xét trường hợp $m = 0$, thì $y = x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên thỏa mãn điều kiện đề bài.

Trường hợp $m \neq 0$, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $\begin{cases} m > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$.

Kết hợp với trường hợp 1 được $m \geq 0$.

Ví dụ 8: Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + (3m^2 + 6m)x + 5$ nghịch biến trên khoảng $(2;3)$

Đáp số: $1 \leq m \leq 2$

Hướng dẫn: Có $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3m^2 + 6m$, giải $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m + 2 \end{cases}$. Vậy hàm số nghịch biến trên $(2;3)$ khi $m \leq 2 < 3 \leq m + 2 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2$.

b. Hàm bậc nhất trên bậc nhất

Ví dụ 1: Tìm m để hàm số $y = \frac{mx - 2}{x + m - 3}$ nghịch biến trên các khoảng xác định.

Đáp số: $1 < m < 2$

Hướng dẫn: Hàm bậc nhất trên bậc nhất $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định khi và chỉ khi $ad - bc < 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$.

Ví dụ 2: Tìm m để hàm số $y = \frac{x+m}{mx+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định

Đáp số: $-1 < m < 1$

Hướng dẫn: Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định chỉ khi $ad - bc > 0 \Leftrightarrow 1 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$

Ví dụ 3: Tìm m để hàm số $y = \frac{x+m}{mx+1}$ đồng biến trên $(1; +\infty)$

Đáp số: $0 \leq m < 1$

Hướng dẫn: Hàm bậc nhất đồng biến (hay nghịch biến) trên một khoảng $(\alpha; \beta)$ phải thỏa mãn đồng thời 2 điều kiện:

$$+ ad - bc > 0 \text{ (} ad - bc < 0 \text{)}$$

+ Phương trình mẫu vô nghiệm trên $(\alpha; \beta)$ (tức nó vô nghiệm hoặc nghiệm của nó không thuộc $(\alpha; \beta)$)

Áp dụng:

$$+ 1 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$$

$$+ mx + 1 = 0 \text{ vô nghiệm trên } (1; +\infty):$$

- Xét $m = 0$: phương trình $0x + 1 = 0$ vô nghiệm, vậy $m = 0$ thỏa mãn.

- Xét $m \neq 0$: phương trình $mx + 1 = 0$ có nghiệm $x = -\frac{1}{m}$. Nghiệm này không

$$\text{thuộc } (1; +\infty) \Leftrightarrow -\frac{1}{m} \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m > 0 \end{cases}.$$

$$\text{Hợp lại hai trường hợp được } \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 0 \end{cases}.$$

Cuối cùng, lấy giao hai điều kiện của bài toán ta được $0 \leq m < 1$.

Ví dụ 4: Tìm m để hàm số $y = \frac{mx-2}{x+m-3}$ nghịch biến trên $(-\infty; \frac{3}{2})$

Đáp số: $1 < m \leq \frac{3}{2}$

Hướng dẫn: Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; \frac{3}{2}) \Leftrightarrow \begin{cases} ad-bc < 0 \\ -\frac{d}{c} \notin (-\infty; \frac{3}{2}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-3m+2 < 0 \\ 3-m \geq \frac{3}{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m < 2 \\ m \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m \leq \frac{3}{2}$$

Ví dụ 5: Tìm m để hàm số $y = \frac{m \sin x + 1}{\sin x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$

Đáp số: $0 \leq m < 1$

Hướng dẫn: Đặt $u(x) = \sin x \Rightarrow u \in (0; 1)$. Ta có $y'_x = \frac{m^2-1}{(u+m)^2} \cdot u'_x = \frac{m^2-1}{(u+m)^2} \cdot (\cos x)$. Ta thấy

$u'_x > 0 \quad \forall x \in (0; \frac{\pi}{2})$, nên hàm số nghịch biến trên $(0; \frac{\pi}{2})$ khi: (1) $m^2-1 < 0$ và (2)

$\sin x + m = 0$ vô nghiệm trên $(0; \frac{\pi}{2})$.

Có (1) $\Leftrightarrow -1 < m < 1$.

Có (2) $\Leftrightarrow t+m=0$ vô nghiệm trên $(0; 1) \Leftrightarrow -m \notin (0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 0 \end{cases}$.

Kết hợp hai điều kiện ta được: $0 \leq m < 1$

Ví dụ 6: Tìm m để hàm số $y = \frac{\cot x - m}{m \cot x - 1}$ đồng biến trên $(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2})$

Đáp số: $-1 < m < 1$

Hướng dẫn: Đặt $u(x) = \cot x \Rightarrow u \in (0;1)$. Ta có $y'_x = \frac{m^2-1}{(u+m)^2} \cdot u'_x = \frac{m^2-1}{(u+m)^2} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$. Ta

thấy $u'_x < 0 \quad \forall x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, nên hàm số đồng biến trên $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ khi: (1) $m^2 - 1 < 0$ và (2)

$m \cot x - 1 = 0$ vô nghiệm trên $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Có (1) $\Leftrightarrow -1 < m < 1$.

Có (2) $\Leftrightarrow mt - 1 = 0$ vô nghiệm trên $(0;1)$:

+ Với $m = 0$, phương trình vô nghiệm trên $\mathbb{R}$ nên thỏa mãn đề bài.

+ Với $m \neq 0$, phương trình có nghiệm $t = \frac{1}{m}$, $\frac{1}{m} \notin (0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{m} < 0 \\ \frac{1}{m} \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 0 < m \leq 1 \end{cases}$.

Hợp hai trường hợp ta được: $m \leq 1$

Kết hợp hai điều kiện ta được: $-1 < m < 1$

c. Hàm khác

Ví dụ 1: Tìm m để hàm số $y = \ln(x^2 + 1) - mx$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Đáp số: $m \leq -1$

Hướng dẫn: Có $y' = \frac{2x}{x^2+1} - m$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi $y' \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq \frac{2x}{x^2+1}$

$\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq \min_{\mathbb{R}} \frac{2x}{x^2+1} \Leftrightarrow m \leq -1$.

Ví dụ 2: Tìm m để hàm số $y = \sin x + mx + 3$ nghịch biến trên tập xác định

Đáp số: $m \leq -1$

Hướng dẫn: Có $y' = \cos x + m$. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $y' \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq -\cos x$

$\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq \min_{\mathbb{R}} (-\cos x) \Leftrightarrow m \leq -1$.

Ví dụ 3: Tìm m để hàm số $y = \sin x - \cos x + (m-2)x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

Đáp số: $m \geq 2 + \sqrt{2}$

Hướng dẫn: Có $y' = \cos x + \sin x + m - 2$. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 $\Leftrightarrow m - 2 \geq \max_{\mathbb{R}} (-\sin x - \cos x) \Leftrightarrow m \geq 2 + \sqrt{2}$

Ví dụ 4: Tìm m để hàm số $y = x + m \tan x$ nghịch biến trên $(0; \frac{\pi}{4})$

Đáp số: $m \leq -1$

Hướng dẫn: Có $y' = 1 + m(1 + \tan^2 x)$. Hàm số nghịch biến trên $(0; \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow y' \leq 0 \quad \forall x \in (0; \frac{\pi}{4})$

$$\text{hay } m \leq \frac{-1}{1 + \tan^2 x} \quad \forall x \in (0; \frac{\pi}{4}) \Leftrightarrow m \leq \min_{[0;1]} \frac{-1}{1+t^2} \Leftrightarrow m \leq -1$$

1.3. GTLN – GTNN

a. Hàm chứa tham số

Ví dụ 1: Hàm số $y = \frac{2x - m}{x + 1}$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0;1]$ bằng 1 khi m bằng bao nhiêu?

Đáp số: $m = 0$

Hướng dẫn: Có

Trường hợp 1: $m > -3$, hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định, do đó đồng biến trên $[0;1]$ nên GTLN của hàm số đạt được tại $x = 1$ và bằng $\frac{2-m}{2}$. Theo giả thiết,

$$\frac{2-m}{2} = 1 \Leftrightarrow m = 0 \text{ (thoả mãn trường hợp).}$$

Trường hợp 2: $m < -3$, hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định do đó nghịch biến trên $[0;1]$ nên GTLN của hàm số đạt được tại $x = 0$ và bằng $-m$. Theo giả thiết, $-m = 1 \Leftrightarrow m = -1$ (không thoả mãn điều kiện trường hợp)

Trường hợp 3: $m = -3$ thì hàm số là hàm hằng $y = 2$, không thoả mãn đề bài.

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 2: Với giá trị nào của m thì trên $[0; 2]$ hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x + m$ có giá trị nhỏ nhất bằng -4 .

Đáp số: $m = -4$

Hướng dẫn: Có $y' = 3x^2 - 12x + 9$. Giải $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = 3$, chỉ có $x = 1 \in (0; 2)$. Tính xác giá trị $f(0) = m$, $f(1) = m + 4$, $f(2) = m + 2$. Vậy $\min_{[0;2]} f(x) = m$. Theo giả thiết thì $m = -4$.

Ví dụ 3: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^3 x - \cos 2x + \sin x + 2$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ bằng mấy?

Đáp số: $\frac{23}{27}$

Hướng dẫn: Đặt $t = \sin x \Rightarrow t \in (-1; 1)$. Khi đó $y = f(t) = t^3 - (1 - 2t^2) + t + 2 = t^3 + 2t^2 + t + 1$.

Tìm GTNN của hàm $f(t)$ trên $(-1; 1)$ đạt được tại $x = -\frac{1}{3}$, và GTNN bằng $\frac{23}{27}$.

Ví dụ 4: Cho hai số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 2$. Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $T = 2(x^3 + y^3) - 3xy$ theo thứ tự là bao nhiêu?

Đáp số: $Max = 6.5$, $Min = -7$

Hướng dẫn:

Cách 1: Đặt $S = x + y$ và $P = xy$ (có $S^2 \geq 4P$)

Giả thiết tương đương $S^2 - 2P = 2 \Rightarrow P = \frac{S^2 - 2}{2}$. Thay vào T ta được $T = 2(S^3 - 3SP) - 3P$
 $= 2S^3 - 3S(S^2 - 2) - \frac{3}{2}(S^2 - 2) = -S^3 - \frac{3}{2}S^2 + 6S + 3 = f(S)$.

Mặt khác, $S^2 \geq 4P \Rightarrow S^2 \geq 2(S^2 - 2) \Rightarrow -2 \leq S \leq 2$. Bây giờ tìm GTLN, GTNN của $f(S)$ trên $[-2; 2]$ được $Max = 6.5$, $Min = -7$

Cách 2: Từ $x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2 - x^2}$. Thay vào T ta được hàm $f_{1,2}(x)$. Dùng chức năng TABLE cho 2 hàm này trên $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ cho ta giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số.

Ví dụ 5: Hàm số $y = x^3 + \frac{1}{x^3} - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right)$, $x > 0$ có GTNN là bao nhiêu?

Đáp số: GTNN = -4

Hướng dẫn: Đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow t \geq 2$ với $x > 0$. Khi đó $y = f(t) = t^3 - 3t - (t^2 - 2) - 2t = t^3 - t^2 - 5t + 2$. Tìm GTNN của hàm này trên $[2; +\infty)$ được $\min_{[2; +\infty)} f(t) = f(2) = -4$

Ví dụ 6: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm cực đại của đồ thị hàm số đã cho và có hệ số góc m . Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho tổng khoảng cách từ hai điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho đến Δ nhỏ nhất là:

- A. 0. B. ± 1 . C. $\emptyset$. D. $\pm \frac{1}{2}$.

Phương trình $\Delta: y = mx \Leftrightarrow mx - y = 0$. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $A(1; -1); B(-1; -1)$

Tổng khoảng cách từ A, B đến $\Delta: T = \frac{|m+1|}{\sqrt{m^2+1}} + \frac{|m-1|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{|m+1|+|m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$. Bây giờ tìm GTNN

của hàm $f(m) = \frac{|m+1|+|m-1|}{\sqrt{m^2+1}}$ bằng 2 cách:

- Cách 1: Chia trường hợp để phá dấu giá trị tuyệt đối.

- Cách 2: Dùng MTCT chức năng table.

Đáp số $x = \pm 1$ và giá trị nhỏ nhất bằng $\sqrt{2}$

Ví dụ 7: Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + 2xy + 3y^2 = 4$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x - y)^2$ là

- A. $\max P = 8$. B. $\max P = 4$. C. $\max P = 12$. D. $\max P = 16$.

Hướng dẫn: Với $y = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow P = 4$

Với $y \neq 0$ Đặt $x = ky \Rightarrow y^2(k^2 + 2k + 3) = 4 \Rightarrow y^2 = \frac{4}{k^2 + 2k + 3}$. Khi đó

$$P = y^2(k-1)^2 = \frac{4(k-1)^2}{k^2 + 2k + 3} = \frac{4k^2 - 8k + 4}{k^2 + 2k + 3}. \text{ Có } P'(k) = \frac{16k^2 + 16k - 32}{(k^2 + 2k + 3)^2} = \frac{16(k-1)(k+2)}{(k^2 + 2k + 3)^2}$$

Từ bảng biến thiên tìm được $\max P = 12$.

b. Bài toán ứng dụng

Ví dụ 1: Trong hệ toạ độ Oxy cho parabol (P): $y = 1 - x^2$. Một tiếp tuyến của (P) di động có hoành độ dương cắt hai trục Ox và Oy lần lượt tại A và B. Diện tích tam giác OAB nhỏ nhất khi hoành độ của điểm M gần nhất với số nào dưới đây:

- A. 0,9 B. 0,7 C. 0,6 D. 0,8

Hướng dẫn: Tiếp tuyến của (P) tại điểm có hoành độ $x_0 > 0$ là d: $y = -2x_0(x - x_0) + 1 - x_0^2$.

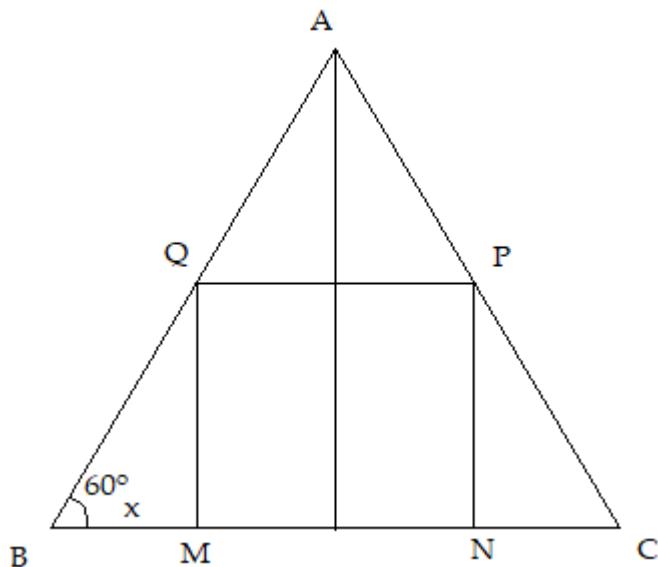
Đường thẳng d cắt Ox tại $A(\frac{x_0^2 + 1}{2x_0}; 0)$, cắt Oy tại $B(0; x_0^2 + 1)$.

Vậy diện tích tam giác OAB bằng $f(x_0) = \frac{1}{2} \frac{(x_0^2 + 1)^2}{2x_0}$. Tìm GTNN của $f(x_0)$ trên $(0; +\infty)$ tại được khi $x_0 \approx 0.6$.

Ví dụ 2: Cho tam giác đều cạnh a; Người ta dựng một hình chữ nhật MNPQ có cạnh MN nằm trên cạnh BC, hai đỉnh P và Q theo thứ tự nằm trên hai cạnh AB và AC. Xác định vị trí điểm M sao cho hình chữ nhật có diện tích lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất đó

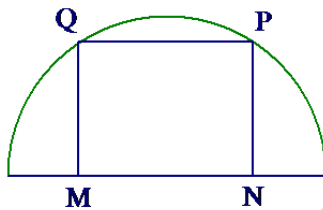
- A. $BM = \frac{a}{2}$ và $S = \frac{\sqrt{3}a^2}{8}$ B. $BM = \frac{a}{4}$ và $S = \frac{\sqrt{3}a^2}{8}$
- C. $BM = \frac{3a}{4}$ và $S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ D. Một kết quả khác

Hướng dẫn:



Đặt $BM = x$ ($0 < x < \frac{a}{2}$). Dễ dàng tính được $MN = a - 2x$ và $MQ = x \cdot \tan 60^\circ = x\sqrt{3}$. Vậy diện tích hình chữ nhật là: $f(x) = \sqrt{3} \cdot x(a - 2x) = \sqrt{3}(-2x^2 + ax)$. Dễ thấy $f(x)$ đạt GTLN tại $x = \frac{a}{4}$ và GTLN bằng $S = \frac{\sqrt{3}a^2}{8}$

Ví dụ 3: Cho hình chữ nhật MNPQ nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính R. Chu vi hình chữ nhật lớn nhất khi tỉ số $\frac{MN}{MQ}$ bằng:



A. 2

B. 4

C. 1

D. 0,5

Hướng dẫn: Gọi O là tâm đường tròn, đặt $OM = x$ ($0 < x < R$) thì $MN = 2x$ và $MQ = \sqrt{R^2 - x^2}$. Vậy diện tích hình chữ nhật là $S = f(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2} \leq x^2 + R^2 - x^2 = R^2$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = \sqrt{R^2 - x^2} \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$. Khi đó $\frac{MN}{MQ} = \frac{2x}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 2$

Ví dụ 4: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh học thấy rằng : Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng

$P(n) = 480 - 20n$ (gam). Hỏi phải thả bao nhiêu cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

Đáp số: 12

Hướng dẫn: Trọng lượng trung bình mỗi con cá là $P(n)$ nên trọng lượng trung bình của n con cá trên một đơn vị diện tích là $f(n) = nP(n) = 480n - 20n^2$. Dễ thấy GTLN của $f(n)$ đạt được tại $n = 12$.

Ví dụ 5: Một chủ hộ kinh doanh có 50 phòng trọ cho thuê. Biết giá cho thuê mỗi tháng là 2.000.000đ/1 phòng trọ, thì không có phòng trống. Nếu cứ tăng giá mỗi phòng trọ thêm

50.000đ/tháng, thì sẽ có 1 phòng bị bỏ trống. Hỏi chủ hộ kinh doanh sẽ cho thuê với giá là bao nhiêu để có thu nhập mỗi tháng cao nhất?

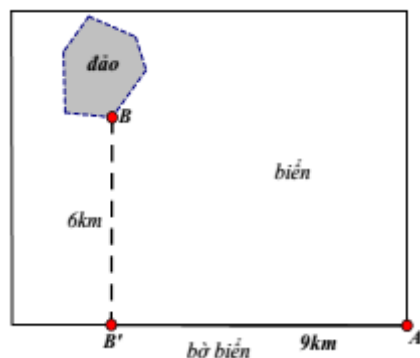
Đáp số: 2.250.000đ

Hướng dẫn: Gọi x (k) là số tiền chủ hộ sẽ tăng thêm cho mỗi phòng thì số phòng trống là $\frac{x}{50}$

(Vì cứ tăng 50k thì có 1 phòng trống). Vậy số phòng được thuê là $50 - \frac{x}{50}$. Khi đó lợi nhuận

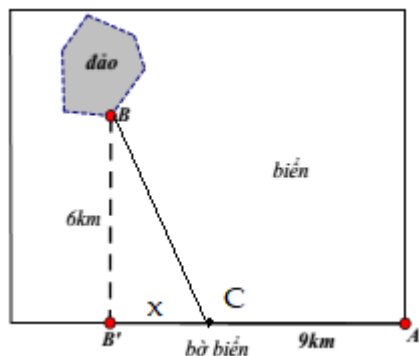
thu về là $f(x) = (2000 + x) \left(50 - \frac{x}{50} \right)$. Giá trị lớn nhất của hàm này trên $(0; +\infty)$ đạt được tại $x = 250$. Vậy giá phòng cho thuê nên là 2.250.000 đ để lợi nhuận cao nhất.

Ví dụ 6: Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6km. Giá để xây đường ống trên bờ là 50.000USD mỗi km, và 130.000USD mỗi km để xây dưới nước. B' là điểm trên bờ biển sao cho BB' vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là 9km. Vị trí C trên đoạn AB' sao cho khi nối ống theo ACB thì số tiền ít nhất. Khi đó C cách A một đoạn bằng:



Đáp số: 6.5km

Hướng dẫn:



Gọi C là vị trí lắp đặt đường ống trên bờ ra đảo B, đặt $B'C = x$. Vậy quãng đường trên bờ là $9 - x$ và quãng đường đi dưới biển là $\sqrt{36 + x^2}$. Chi phí lắp đặt cho toàn bộ công trình là:

$$f(x) = 13\sqrt{36 + x^2} + 5(9 - x). \text{ Tìm GTNN của } f(x) \text{ trên } [0; 9] \text{ được } x = 6.5 \text{ (km).}$$

Ví dụ 7: Cho điểm M di chuyển trên Parabol (P): $y = x^2$. Khoảng cách ngắn nhất từ M đến $A(3; 0)$ bằng bao nhiêu?

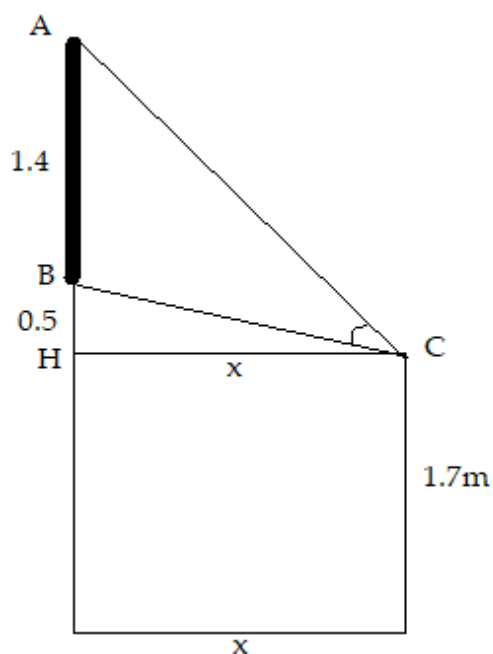
Đáp số: $d = \sqrt{5}$

Hướng dẫn: Do $M \in (P)$ nên $M(x; x^2)$. Vậy $d = AM = \sqrt{(x-3)^2 + x^4}$. Tìm GTNN của hàm $f(x) = x^4 + (x-3)^2$ trên $\mathbb{R}$ được $\min d = \sqrt{5}$ khi $x = 1$.

Ví dụ 8: Một màn hình lớn TV cao 1.4m tại phòng chờ nhà ga được treo trên tường cách mặt đất 2.2m. Một hành khách cao 1.78 đang đứng đọc thông tin trên màn hình. Hỏi hành khách này phải đứng cách tường bao xa để góc nhìn lớn nhất biết rằng khoảng cách từ mắt đến đỉnh đầu anh ta là 8cm.

Đáp số: $x = \frac{\sqrt{95}}{10}$

Hướng dẫn:

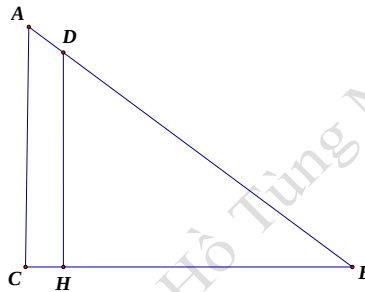


Vị trí từ mặt đất đến mắt hành khách là 1.7m do khoảng cách từ mắt đến đầu anh ta là 0.08m. Gọi α là góc quan sát của anh ta với màn hình, thì $\alpha = ACB$. Giá trị α lớn nhất khi và chỉ khi $\tan \alpha$ lớn nhất.

$$\text{Ta có: } \tan \alpha = \tan(ACH - BCH) = \frac{\tan ACH - \tan BCH}{1 + \tan ACH \cdot \tan BCH} = \frac{\frac{1.9}{x} - \frac{0.5}{x}}{1 + \frac{1.9}{x} \cdot \frac{0.5}{x}} = \frac{1.4x}{x^2 + 1.9 \times 0.5}$$

$$= f(x). \text{ Tìm GTLN của hàm } f(x) \text{ đạt được tại } x = \frac{\sqrt{95}}{10}.$$

Ví dụ 9: Chiều dài bé nhất của cái thang AB để nó có thể tựa vào tường AC và mặt đất BC , ngang qua một cột đỡ DH cao $4m$ song song và cách tường $CH = 0,5m$ là bao nhiêu?



Đáp số: $\min f(x) = \frac{5\sqrt{5}}{2}$

Hướng dẫn: Gọi $x = HB \Rightarrow BD = \sqrt{x^2 + 16}$. Có $AC \parallel DH$ nên $\frac{CH}{HB} = \frac{AD}{DB}$

$$\Rightarrow AD = \frac{0.5}{x} \sqrt{x^2 + 16}. \text{ Vậy } AB = \sqrt{x^2 + 16} + \frac{0.5}{x} \sqrt{x^2 + 16} = f(x) \text{ với } x > 0$$

Dùng TABLE tìm GTNN của $f(x)$ trên $(0; +\infty)$ được $\min f(x) = \frac{5\sqrt{5}}{2}$ tại $x = 2$.

Ví dụ 10: Một nạn nhân đuối nước ở vị trí cách bờ hồ 300m. Một người phát hiện tai nạn đang đứng trên bờ cách nạn nhân 500m. Anh ta phải chọn vị trí cách vị trí hiện tại bao xa để xuống hồ bơi ra cứu nạn nhân sao cho mất ít thời gian nhất, biết rằng vận tốc chạy bộ kéo theo chiếc thuyền nhỏ của anh ta là 20km/h và vận tốc chèo thuyền là 10km/h.

Đáp số: $x \approx 226$ (m)

Hướng dẫn: Gọi x là khoảng cách từ vị trí người cứu nạn đang đứng đến vị trí người đó xuống nước cứu người, thì quãng đường người đó phải bơi thuyền là $\sqrt{9+(4-x)^2}$ (trăm mét). Còn quãng đường chạy bộ là x (trăm mét). Vậy, thời gian người này từ vị trí hiện tại đến vị trí cứu người là: $t = \frac{x}{200} + \frac{\sqrt{9+(4-x)^2}}{100}$ (h). Ta tìm GTNN của $f(x) = \frac{x}{200} + \frac{\sqrt{9+(4-x)^2}}{100}$ với $x \in [0; 4]$.

1.4. Suy đồ thị

Ví dụ 1: Nêu cách vẽ đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ từ đồ thị hàm số $y = f(x)$

Hướng dẫn:

- Giữ nguyên đồ thị của $y = f(x)$ ở phần nằm trên trục Ox
- Lấy đối xứng phần đồ thị $y = f(x)$ lên trên qua Ox

Ví dụ 2: Nêu cách vẽ đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ từ đồ thị hàm số $y = f(x)$

Hướng dẫn:

- Giữ nguyên phần đồ thị của $y = f(x)$ bên phải Oy và xoá bên trái.
- Lấy đối xứng phần này sang trái qua Oy

Ví dụ 3: Nêu cách vẽ đồ thị hàm số $y = -f(x)$ từ đồ thị hàm số $y = f(x)$

Hướng dẫn:

- Lấy đối xứng qua Ox

Ví dụ 4: Nêu cách vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{|x-1|}$ từ đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$

Hướng dẫn:

- Giữ nguyên đồ thị của $y = \frac{x+1}{x-1}$ ở bên phải đường thẳng $x = 1$ (tiệm cận đứng)
- Lấy đối xứng đồ thị $y = \frac{x+1}{x-1}$ ở bên trái đường $x = 1$ qua Ox

Ví dụ 5: Nêu cách vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{|x-2|}{x+1}$ từ đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$

Hướng dẫn:

- Giữ nguyên đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$ ở phần bên phải đường thẳng $x = 2$
- Lấy đối xứng phần đồ thị $y = \frac{x-2}{x+1}$ ở bên trái đường $x = 2$ qua Ox

Ví dụ 6: Nêu cách vẽ đồ thị hàm số $y = |x|(x^2 - 4)$ từ đồ thị hàm số $y = x(x^2 - 4)$

Hướng dẫn:

- Giữ nguyên đồ thị hàm số $y = x(x^2 - 4)$ ở bên phải Oy
- Lấy đối xứng phần đồ thị của $y = x(x^2 - 4)$ ở bên trái Oy qua Ox

1.5. Tương giao**a. Xét phương trình hoành độ giao điểm**

Ví dụ 1: Xác định số giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2x^2 - 6x + \ln(2x + 3) + 4$ với trục hoành.

Đáp số: 1

Hướng dẫn: Xét hàm $f(x) = 2x^2 - 6x + \ln(2x + 3) + 4$ với $x > -\frac{3}{2}$. Ta có $f'(x) = 4x - 6 + \frac{2}{2x+3}$

Giải $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$. Lập bảng biến thiên của $f(x)$:

x	$-\frac{3}{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$			
$f'(x)$	+	0	-	0	+		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	14.72	$\searrow$	1.27	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên thấy ngay đồ thị hàm số cắt Ox tại 1 điểm nên phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Ví dụ 2: Hỏi phương trình $3x^2 - 6x + \ln(x+1)^3 + 1 = 0$ có bao nhiêu nghiệm phân biệt?

Đáp số: 3

Hướng dẫn: Xét hàm $f(x) = 3x^2 - 6x + \ln(x+1)^3 + 1$ ($x > -1$). Có $f'(x) = 6x - 6 + \frac{3}{x+1}$,

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Lập bảng biến thiên của $f(x)$ có:

x	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$			
y'	+	0	-	0	+		
y	$-\infty$	$\nearrow$	3.058	$\searrow$	-0.138	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy ngay đồ thị cắt Ox tại 3 điểm phân biệt nên phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 3: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \sqrt{2x+3}(x^2 - 2x - 4) - \frac{1}{20}$ và trục Ox là bao nhiêu?

Đáp số: 3

Hướng dẫn: Có $y' = \frac{x^2 - 2x - 4}{\sqrt{2x+3}} + \sqrt{2x+3}(2x-2)$. Có $y' = 0 \Leftrightarrow$

$x^2 - 2x - 4 + (2x+3)(2x-2) = 0 \Leftrightarrow 5x^2 - 10 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$. Lập bảng biến thiên của $f(x)$

x	$-\frac{3}{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$			
y'	+	0	-	0	+		
y	$-\frac{1}{20}$	$\nearrow$	0.293	$\searrow$	-11.706	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên thấy phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

Ví dụ 4: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - m + 2$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

Đáp số: $m < 3$

Hướng dẫn:

Cách 1: Cô lập m chuyển về bài toán biện luận số giao điểm của đường $y = m$ với đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Cách 2: Phương trình $x^3 - 3x^2 + mx - m + 2 = 0$ nhận được nghiệm $x = 1$ nên phân tích được thành $(x - 1)(x^2 - 2x + m - 2) = 0$. Phương trình hoành độ giao điểm có 3 nghiệm phân biệt khi phương trình $x^2 - 2x + m - 2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1. Điều này tương đương với $m \neq 3$ và $3 - m > 0 \Leftrightarrow m < 3$.

Ví dụ 5: Cho đồ thị (C) có phương trình $y = \frac{x+2}{x-1}$ và đường thẳng (d) có phương trình $y = x + m$. Tìm m để (d) cắt (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho:

a. Độ dài đoạn AB ngắn nhất

Đáp số: AB nhỏ nhất bằng $2\sqrt{6}$ khi $m = 0$

b. Tam giác OAB vuông tại O

Đáp số: $m \in \emptyset$

c. Diện tích tam giác OAB bằng 4

Đáp số: $m = \pm 2$

Hướng dẫn:

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x + 2 = (x - 1)(x + m) \Leftrightarrow x^2 + (m - 2)x - m - 2 = 0$ (1).

Lưu ý $x = 1$ không là nghiệm của phương trình với mọi m . Tính $\Delta = (m - 2)^2 + 4(m + 2) = m^2 + 12 > 0 \quad \forall m \in \mathbb{R}$. Vậy (d) luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B $\forall m \in \mathbb{R}$.

Gọi x_1, x_2 lần lượt là 2 nghiệm của (1), ta có các kết quả quen thuộc:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 2 - m \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = -m - 2 \end{cases} \quad \text{. Khi đó } A(x_1; x_1 + m) \text{ và } B(x_2; x_2 + m).$$

$$|x_1 - x_2| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = \frac{\sqrt{m^2 + 12}}{1}$$

a. Có $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_1 + m - x_2 - m)^2} = \sqrt{2} |x_1 - x_2| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{m^2 + 12}$. Vậy AB nhỏ nhất bằng $2\sqrt{6}$ khi $m = 0$

b. Có $\overrightarrow{OA} = (x_1; x_1 + m)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2; x_2 + m)$. Tam giác OAB vuông tại O khi và chỉ khi $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$
 $\Leftrightarrow 2x_1 \cdot x_2 + m(x_1 + x_2) + m^2 = 0 \Leftrightarrow -2m - 4 + m(2 - m) + m^2 = 0 \Leftrightarrow m \in \emptyset$.

c. Diện tích tam giác OAB, $S = \frac{1}{2} |x_1(x_2 + m) - x_2(x_1 + m)| = \frac{|m|}{2} |x_1 - x_2| = \frac{|m|\sqrt{m^2 + 12}}{2}$

Cho $S = 4 \Leftrightarrow \frac{|m|\sqrt{m^2 + 12}}{2} = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

b. Tương giao khi cô lập tham số

Ví dụ 1: Tìm m để phương trình $2x^3 + 3x^2 - 12x + 2m - 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

Đáp số: $-\frac{19}{2} < m < 4$

Hướng dẫn: Cô lập tham số từ phương trình ta có: $1 - 2m = 2x^3 + 3x^2 - 12x$. Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đường thẳng (d) $y = 1 - 2m$ và đồ thị (C) $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$. Do (d) là đường thẳng song song với Ox nên nó cắt (C) tại 3 điểm phân biệt khi

$$y_{CT} < 1 - 2m < y_{CD} \Leftrightarrow -\frac{19}{2} < m < 4.$$

Ví dụ 2: Tìm m để phương trình $2x^3 - 3x^2 + 2 = 2^{1-2m} = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Đáp số: $0 < m < \frac{1}{2}$

Hướng dẫn: Cô lập tham số ta được phương trình $2x^3 - 3x^2 + 2 = 2^{1-2m}$. Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đường thẳng (d): $y = 2^{1-2m}$ và đồ thị (C) $y = 2x^3 - 3x^2 + 2$.

Phương trình có 3 nghiệm khi và chỉ khi (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow y_{ct} < 2^{1-2m} < y_{cd}$

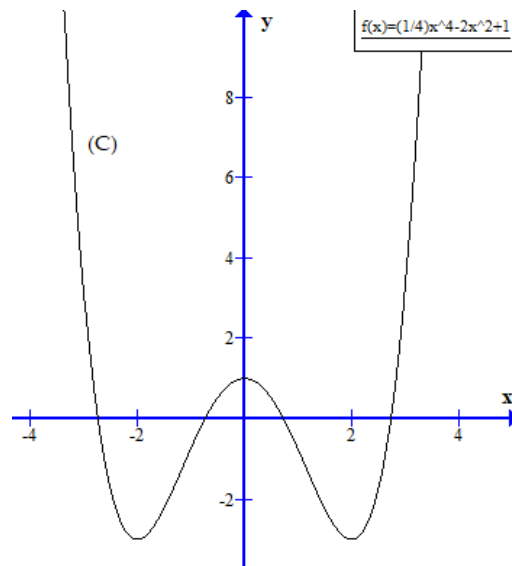
$$\Leftrightarrow 1 < 2^{1-2m} < 2 \Leftrightarrow 0 < 1 - 2m < 1 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{2}$$

Ví dụ 3: Giá trị m để phương trình $\left| \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1 \right| = 3^m$ có 8 nghiệm phân biệt

Đáp số: $m < 0$

Hướng dẫn: phương trình $\left| \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1 \right| = 3^m$ có 8 nghiệm phân biệt khi đường $y = 3^m$ cắt đồ thị $y = \left| \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1 \right|$ tại 8 điểm phân biệt.

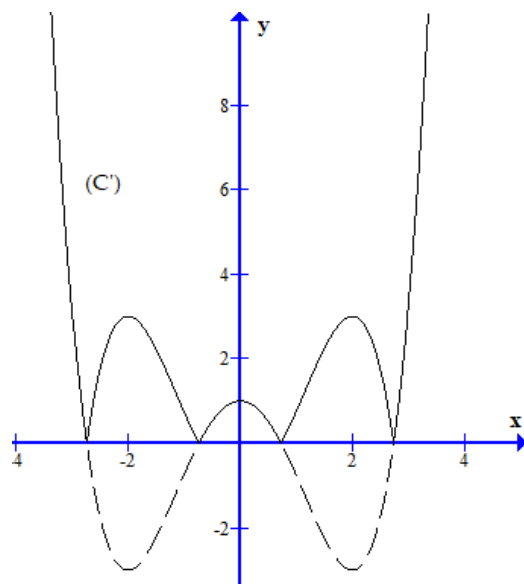
Vẽ (C): $y = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$



Từ đồ thị (C), ta vẽ đồ thị (C') theo quy tắc:

- + Giữ nguyên (C) ở phần nằm trên Ox.
- + Lấy đối xứng phần dưới Ox lên trên qua Ox

(C') là toàn bộ phần trên Ox.

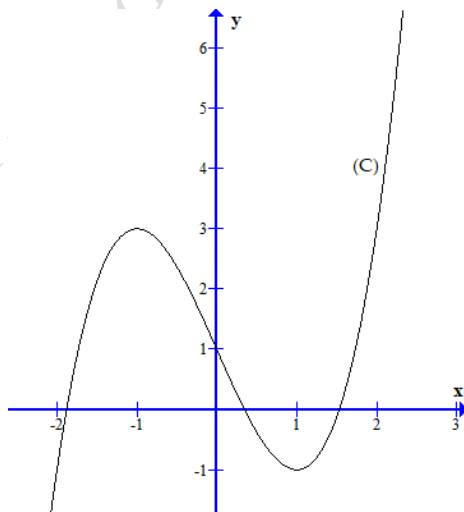


Từ đồ thị ta thấy đường $y = 3^m$ cắt (C') tại 8 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 0 < 3^m < 1 \Leftrightarrow m < 0$

Ví dụ 4: Tìm m để phương trình $|x^3 - 3x + 1| = m$ có 6 nghiệm phân biệt.

Đáp số: $0 < m < 1$

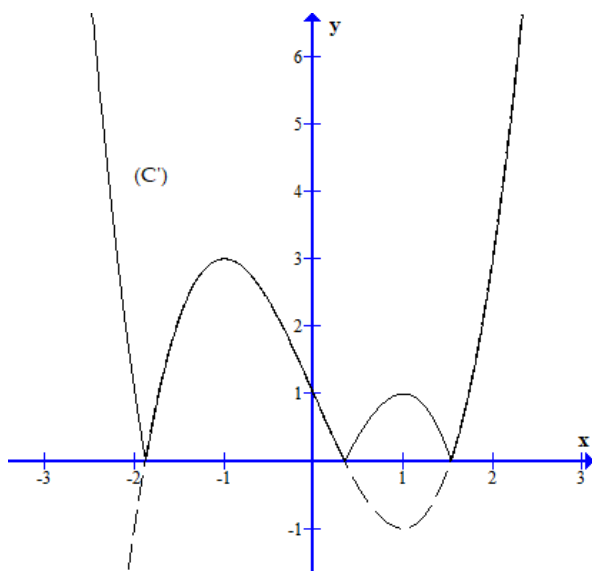
Hướng dẫn: Phương trình $|x^3 - 3x + 1| = m$ có 6 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ đường (d): $y = m$ cắt đồ thị (C') : $y = |x^3 - 3x + 1|$ tại 6 điểm phân biệt. Vẽ đồ thị (C) :



Từ đồ thị (C) , ta vẽ đồ thị (C') theo quy tắc:

- + Giữ nguyên (C) ở phần nằm trên Ox .
- + Lấy đối xứng phần dưới Ox lên trên qua Ox

(C') là toàn bộ phần trên Ox.



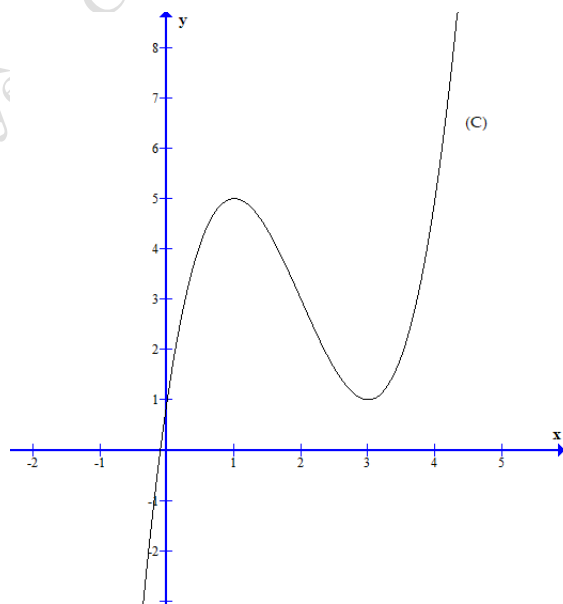
Từ đồ thị ta thấy (d) cắt (C') tại 6 điểm phân biệt khi và chỉ khi $0 < m < 1$

Ví dụ 5: Tìm m để phương trình $|x|^3 - 6x^2 + 9|x| - m + 1 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Đáp số: $1 < m < 5$

Hướng dẫn: Phương trình có 6 nghiệm phân biệt tương đương với đường thẳng (d): $y = m$ cắt đồ thị (C'): $y = |x|^3 - 6x^2 + 9|x| + 1$ tại 6 điểm phân biệt.

Vẽ đồ thị (C) của hàm $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

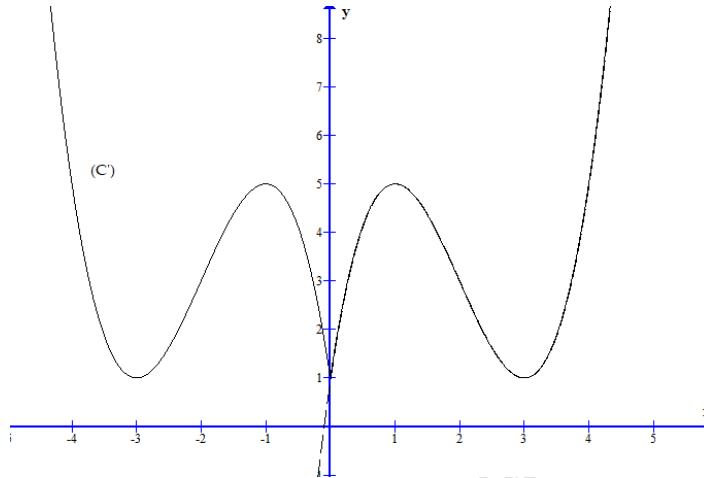


Vẽ đồ thị (C') của $y = f(|x|)$

+ Giữ nguyên phần (C) nằm bên phải Oy, oá bên trái.

+ Lấy đối xứng phần này qua Oy.

(C') là hai phần cân xứng 2 hai bên Oy.



Từ đồ thị ta thấy (d) cắt (C') tại 6 điểm phân biệt khi $1 < m < 5$

Ví dụ 6: Tìm m để đồ thị (C) của hàm số $y = 2x^3 - 3mx^2 - m + 2$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

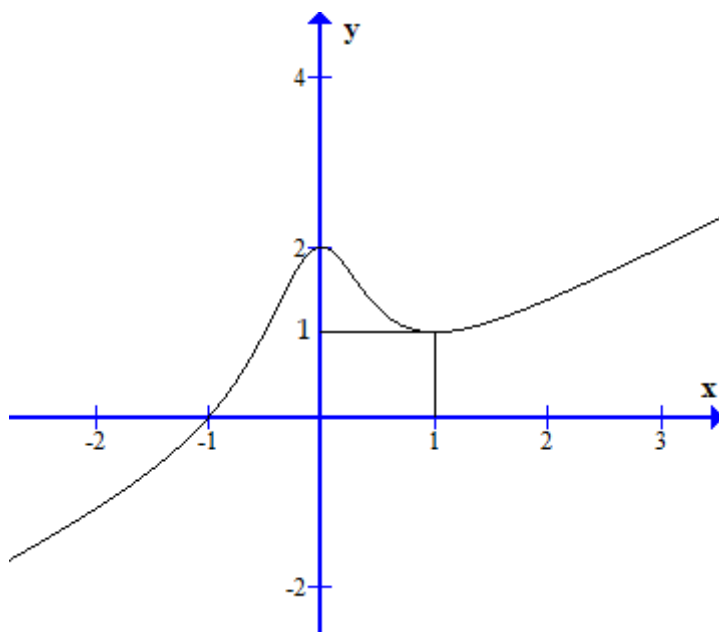
Đáp số: $1 < m < 2$

Hướng dẫn:

Cách 1: (C) cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt tương đương với (C) có 2 cực trị nằm về 2 phía Ox hay $y_{cd} \cdot y_{ct} < 0$. Có $y' = 6x^2 - 6mx$. Phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = m$. Vậy điều kiện hàm số có hai cực trị là $m \neq 0$.

Khi đó, $y_1 = -m + 2$; $y_2 = -m^3 - m + 2$. Điều kiện $y_{cd} \cdot y_{ct} < 0 \Leftrightarrow 1 < m < 2$.

Cách 2: Phương trình hoành độ giao điểm $2x^3 - 3mx^2 - m + 2 = 0$. Do không nhầm được nghiệm đặc biệt nên cô lập tham số được: $m = \frac{2x^3 + 2}{3x^2 + 1}$. Phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị (C) : $y = \frac{2x^3 + 2}{3x^2 + 1}$ tại 3 điểm phân biệt. Lập bảng biến thiên hoặc vẽ đồ thị (C) :



Ta thấy đường $y = m$ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt khi và chỉ khi $1 < m < 2$.

Ví dụ 7: Tìm m để phương trình $\log(mx) = 2\log(x+1)$ có nghiệm duy nhất.

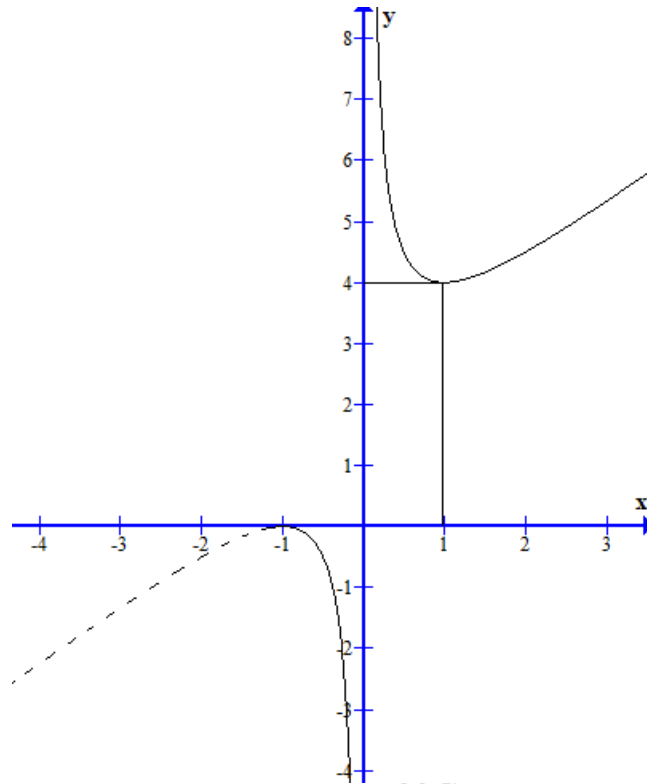
Đáp số: $\begin{cases} m = 4 \\ m < 0 \end{cases}$

Hướng dẫn: Phương trình tương đương với $\begin{cases} x > -1 \\ mx = (x+1)^2 \end{cases}$.

Phương trình $mx = (x+1)^2 \Leftrightarrow m = \frac{(x+1)^2}{x}$. Phương trình đã cho có đúng 1 nghiệm khi đường

$y = m$ cắt đồ thị hàm $y = \frac{(x+1)^2}{x}$ trên miền $(-1; +\infty)$ tại duy nhất 1 điểm. Vẽ đồ thị hàm

$y = \frac{(x+1)^2}{x}$ (hoặc chỉ cần lập bảng biến thiên).



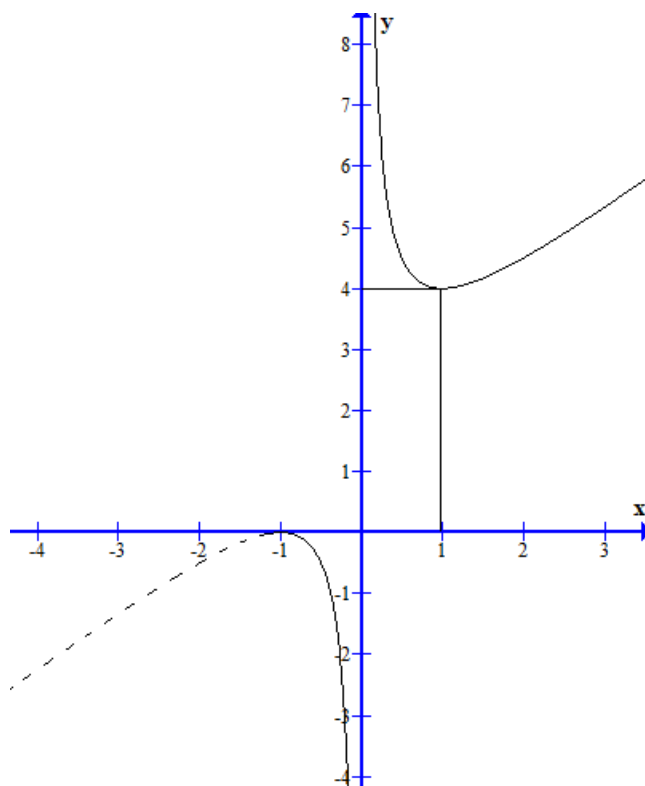
Từ đồ thị ta thấy ngay đường $y = m$ cắt đồ thị trên miền $x > -1$ tại một điểm khi $m < 0$ hoặc $m = 4$.

Ví dụ 8: Tìm m để phương trình $2\ln(x+1) - \ln(mx) = -x^2 + (m-2)x - 1$ có nghiệm

Đáp số: $\begin{cases} m \geq 4 \\ m < 0 \end{cases}$

Hướng dẫn: Phương trình tương đương với $\ln(x+1)^2 + (x+1)^2 = \ln mx + mx$ (Chỉ cần 1 điều kiện $x > -1$). Phương trình tương đương với $\ln a + a = \ln b + b$ với $a = (x+1)^2$, $b = mx$. Do hàm $f(t) = \ln t + t$ đồng biến trên $(0; \infty)$ nên phương trình tương đương với $a = b$ hay $mx = (x+1)^2$.

Phương trình $mx = (x+1)^2 \Leftrightarrow m = \frac{(x+1)^2}{x}$. Phương trình đã cho có nghiệm khi đường $y = m$ cắt đồ thị hàm $y = \frac{(x+1)^2}{x}$ trên miền $(-1; +\infty)$ cắt nhau. Vẽ đồ thị hàm $y = \frac{(x+1)^2}{x}$ (hoặc chỉ cần lập bảng biến thiên).



Từ đồ thị ta thấy ngay đường $y = m$ cắt đồ thị trên miền $x > -1$ khi $m < 0$ hoặc $m \geq 4$.

Ví dụ 9: Tìm m để phương trình $3^{\sqrt{x^2+mx+1}} = 9^{x-1}$ có nghiệm.

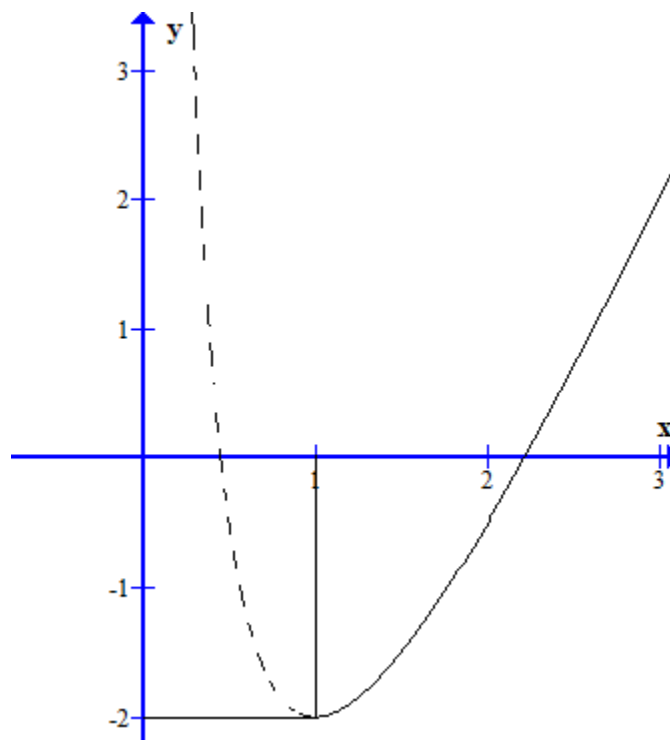
Đáp số: $m \geq -2$

Hướng dẫn: Phương trình tương đương với $\sqrt{x^2 + mx + 1} = 2(x - 1) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x \geq 1 \\ x^2 + mx + 1 = 4x^2 - 8x + 4 \end{cases} \cdot \text{Phương trình tương đương } m = \frac{3x^2 - 8x + 3}{x} \text{ trên miền } x \geq 1.$$

Phương trình có nghiệm khi đường $y = m$ và đồ thị $y = \frac{3x^2 - 8x + 3}{x}$ (C) có điểm chung.

Vẽ (C) (hoặc chỉ cần lập bảng biến thiên của nó trên $[1; +\infty)$):

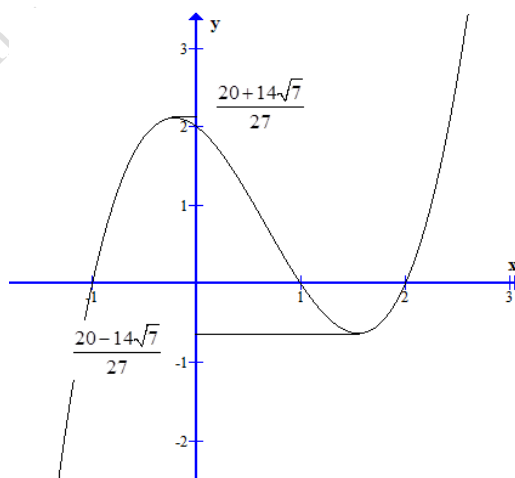


Từ đồ thị thấy đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị trên miền $[1; +\infty)$ khi $m \geq -2$

Ví dụ 10: Tìm m để phương trình $|x-2|(x^2-1) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Đáp số: $0 < m < \frac{14\sqrt{7}-20}{27}$

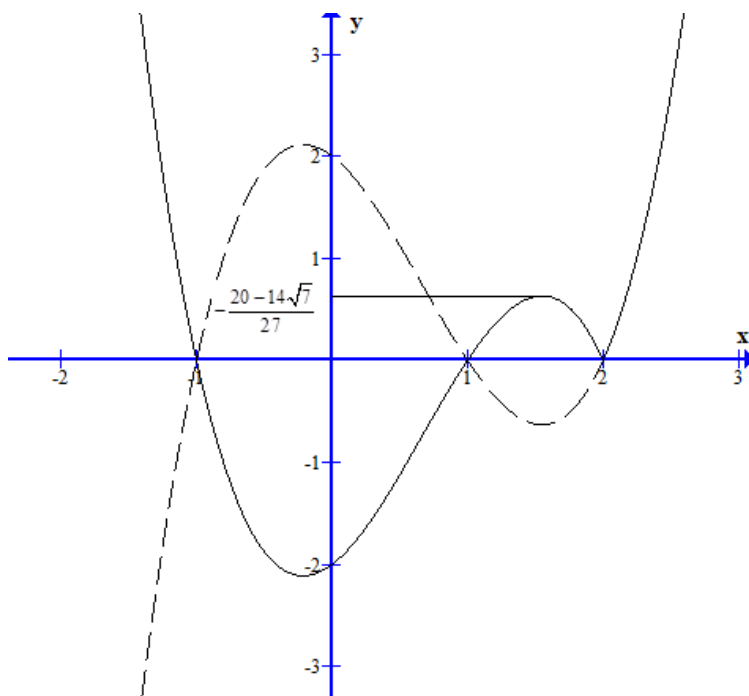
Hướng dẫn: Vẽ đồ thị hàm bậc 3: $y = (x-2)(x^2-1)$ (C).



Từ (C) vẽ đồ thị (C') của hàm $y = |x-2|(x^2-1)$ như sau:

+ Giữ nguyên (C) ở phần bên phải đường thẳng $x = 2$ (vì với $x > 2$ thì đồ thị có cùng phương trình)

+ Lấy đối xứng phần (C) nằm bên trái đường $x = 2$ qua Ox (vì với $x < 2$ thì (C') có phương trình $y = -f(x)$)



Từ đồ thị ta thấy đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị tại 4 điểm phân biệt khi và chỉ khi

$$0 < m < \frac{14\sqrt{7} - 20}{27}$$

Ví dụ 11: Có bao nhiêu số nguyên m sao cho bất phương trình sau đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

$$\log 5 + \log(x^2 + 1) \geq \log(mx^2 + 4x + m)$$

Đáp số: $2 < m \leq 3$

Hướng dẫn: Bất phương trình đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ khi thoả mãn đồng thời:

(1): Tập xác định là $\mathbb{R} \Leftrightarrow mx^2 + 4x + m > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$. Lưu ý $m = 0$ không thoả mãn.

(2): Bất phương trình tương đương $5x^2 + 5 \geq mx^2 + 4x + m \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow (m-5)x^2 + 4x + (m-5) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m-5 < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 3. \text{ Lưu ý } m=5 \text{ không thỏa mãn.}$$

Vậy, từ (1) và (2) ta có $2 < m \leq 3$.

Ví dụ 12: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho phương trình $\frac{||x|-2|}{|x|+1} = m$ có

đúng 2 nghiệm phân biệt là:

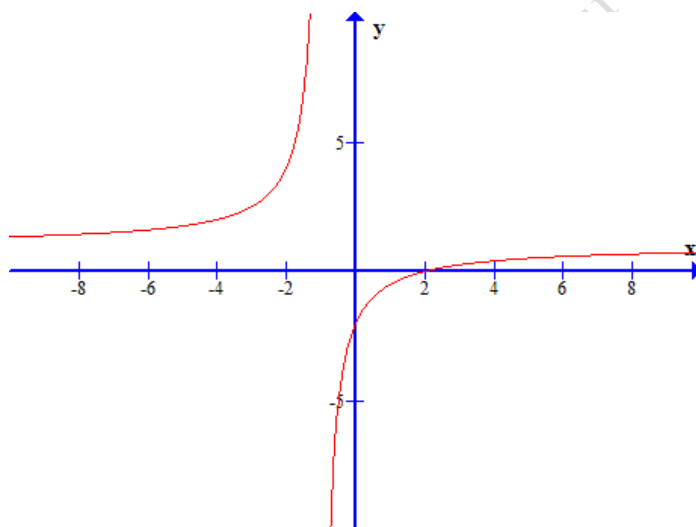
A. $[1;2] \cup \{0\}$.

B. $[1;2) \cup \{0\}$.

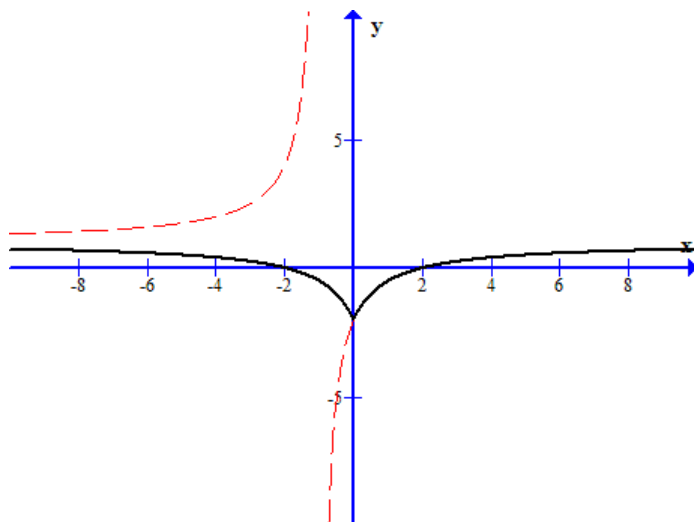
C. $[0;2)$.

D. $[1;2)$.

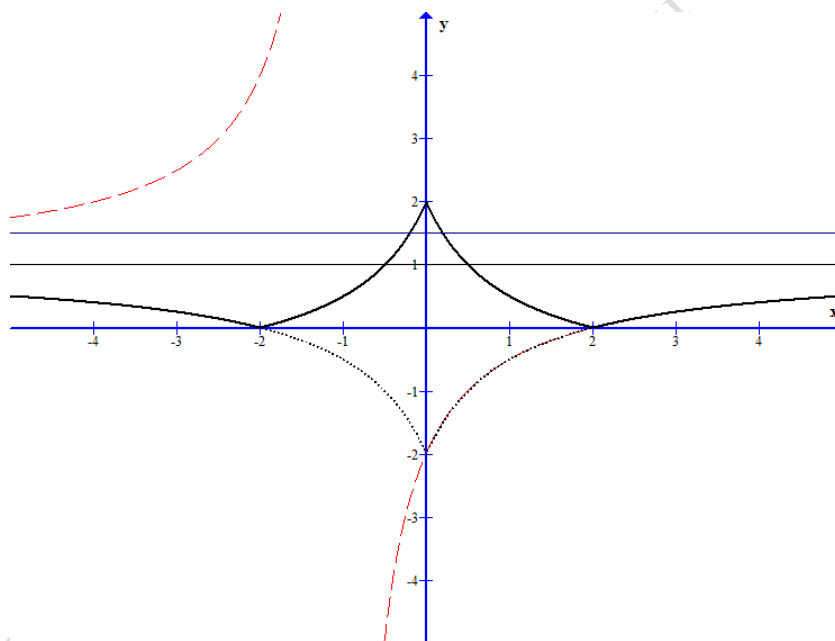
Hướng dẫn: Đồ thị hàm số $y = \frac{x-2}{x+1} = f(x)$:



Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$



Đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$



Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m < 2 \\ m = 0 \end{cases}$

1.6. Tiệm cận của đồ thị hàm số

Ví dụ 1: Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{\sqrt{mx^2+1}}$ có hai tiệm cận ngang.

Đáp số: $m > 0$

Hướng dẫn: Để có tiệm cận ngang trước tiên tập xác định của hàm số phải vô cực. Nên nếu $m < 0$ thì điều kiện $mx^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow x \in (x_1; x_2)$. Như thế không thể có giới hạn của hàm số tại vô cực được.

Với $m = 0$ thì hàm số thành $y = x - 1$ đương nhiên không có tiệm cận ngang.

$$\text{Với } m > 0, \text{ ta có } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{\sqrt{mx^2+1}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{\sqrt{mx^2}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{\sqrt{m}|x|} = \pm \frac{1}{\sqrt{m}}$$

Vậy đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang khi và chỉ khi $m > 0$

Ví dụ 2: Tìm số tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \sqrt{x^2 - x + 1} - x + 2$

Đáp số: 1

Hướng dẫn: Có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang về bên phải.

Có $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-x+1}+x} + 2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$. Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y = \frac{3}{2}$ về phía bên trái.

Ví dụ 3: Xác định số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-4x+3}$

Đáp số: 1

Hướng dẫn: Dễ thấy $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$ (không có giới hạn tại âm vô cực do $x \geq 2$) nên $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị.

Mẫu thức có 2 nghiệm $x = 3$ và $x = 1$. Tuy nhiên: $x = 1 < 2$ nên không có giới hạn khi $x \rightarrow 1^\pm$. Vậy $x = 1$ không là tiệm cận đứng. Có $x = 3$ là nghiệm đơn, đồng thời cũng là nghiệm của tử thức, nên nhân tử $(x-3)$ bị khử ở mẫu nên $x = 3$ cũng không là tiệm cận đứng. Vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Ví dụ 4: Gọi a, b là các số thực thoả mãn đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{2x-1}+ax+b}{(x-1)^2}$ không có tiệm cận

đứng. Tính $T = 2a + 3b$

Đáp số: $T = -2$

Hướng dẫn: Với điều kiện $x \geq \frac{1}{2}$ thì nghiệm của mẫu $x = 1$ thoả mãn. Như vậy, muốn đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng chỉ khi $(x-1)^2$ ở mẫu bị khử hết. Điều này tương đương với

$$f(x) = \sqrt{2x-1} + ax + b = (x-1)^2 g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+1=0 \\ 1+a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=0 \end{cases}$$

Vậy $T = -2$.

Ví dụ 5: Tìm tập hợp giá trị m để đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{(mx^2-2x+1)(4x^2+4mx+1)}$ có đúng một đường tiệm cận.

Đáp số: $m = 0$

Hướng dẫn: Ta thấy với mọi m thì bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu nên $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 0$. Vậy đồ thị hàm số luôn có tiệm cận ngang $y = 0$.

Ta đi tìm điều kiện để đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Xét trường hợp $m = 0$ (vì nằm ở hệ số bậc 2), hàm số thành $y = \frac{-1}{4x^2+1}$ nên đồ thị không có tiệm cận đứng. Vậy $m = 0$ thoả mãn.

Với $m \neq 0$, đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng khi và chỉ khi cả 2 phương trình ở mẫu vô nghiệm. Bởi chỉ cần có 1 phương trình có nghiệm kép hay phân biệt thì đồ thị hàm số sẽ có ít nhất 1 tiệm cận đứng là 1 trong các nghiệm đó. Giải điều kiện của 2 phương trình vô nghiệm

$$\text{ta được } \begin{cases} 1-m < 0 \\ 4m^2-4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -1 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

Vậy chỉ có $m = 0$ thoả mãn đề bài.

Ví dụ 6: Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{x-3}{\sqrt{x^2+m}}$ có 3 tiệm cận.

$$\text{Đáp số: } \begin{cases} m < 0 \\ m \neq -9 \end{cases}$$

Hướng dẫn: Có $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm 1$. Vậy đồ thị hàm số luôn có hai tiệm cận ngang là $y = 1$ và $y = -1$.

Để đồ thị hàm số có đúng 3 tiệm cận, điều kiện cần và đủ là nó chỉ có đúng 1 tiệm cận đứng.

Điều này phụ thuộc vào nghiệm của phương trình $x^2 + m = 0$.

- + Nếu phương trình vô nghiệm tức $m > 0$ thì đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.
- + Nếu $m = 0$ phương trình có nghiệm kép $x = 0$ không là nghiệm của tử nên có 1 tiệm cận đứng $x = 0$.
- + Nếu $m < 0$ phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x = \pm\sqrt{-m}$. Muốn cả 2 nghiệm này tương ứng 2 tiệm cận đứng chỉ khi cả 2 nghiệm khác 3 (vì nếu có nghiệm bằng 3 thì $\lim_{x \rightarrow 3} y = 0$ nên không là tiệm cận đứng, hay có thể hiểu là tử nó khử mất nhân tử $\sqrt{x-3}$ ở mẫu). Vậy $\sqrt{-m} \neq 3 \Leftrightarrow m \neq -9$.

Vậy đáp số bài toán là $\begin{cases} m < 0 \\ m \neq -9 \end{cases}$

Ví dụ 7: Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{(x^2+3x+2)(x+m)}$ có đúng hai đường tiệm cận.

Đáp số: $m \geq 1$

Hướng dẫn: Đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y = 0$ với mọi m do bậc của tử nhỏ hơn bậc của mẫu.

Mẫu thức có 3 nghiệm: $x = -1$; $x = -2$; $x = -m$.

Có $x = -2 < -1$ không thuộc miền xác định của tử nên không là tiệm cận đứng.

Có $\lim_{x \rightarrow -1^+} y = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{(x+2)\sqrt{x+1}(x+m)} = \pm\infty$. Vậy đường $x = -1$ luôn là tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số có đúng 1 tiệm cận đứng khi $x = -m$ không là tiệm cận đứng hoặc trùng $x = -1$
 $\Leftrightarrow -m \leq -1 \Leftrightarrow m \geq 1$

2. MŨ – LOGARIT

a. Đồ thị của hàm mũ, logarit

Ví dụ 1: Đồ thị hình bên là của hàm số nào?

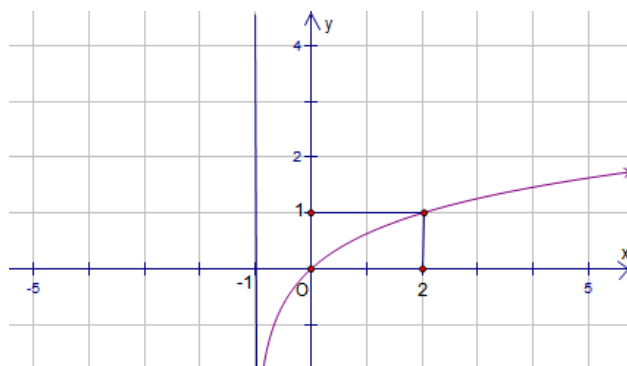
A. $y = \log_2(x+1)$

B. $y = \log_2 x + 1$

C. $y = \log_3 x$

D.

$y = \log_3(x+1)$



Hướng dẫn: Thay $x = 2; y = 1$ thấy chỉ có hàm $y = \log_3(x+1)$ thỏa mãn.

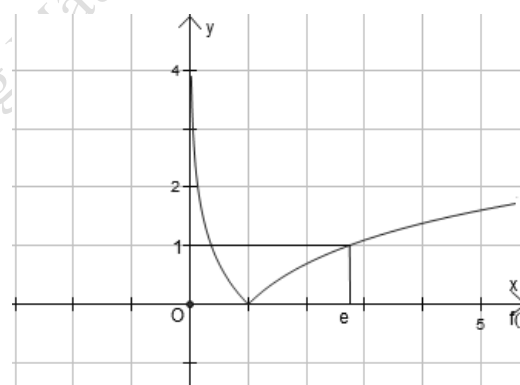
Ví dụ 2: Đồ thị bên dưới là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = \ln|x|$

B. $y = |\ln x|$

C. $y = |\ln(x+1)|$

D. $y = \ln|x+1|$



Hướng dẫn: Thay $x = e; y = 1$ nên chỉ có thể là $y = \ln|x|$ hoặc $y = |\ln x|$. Thay $x = 0.5$ vào 2 hàm thấy $y = \ln 0.5 < 0$ trong khi đồ thị hàm số luôn nằm trên trục Ox, vậy $y = |\ln x|$.

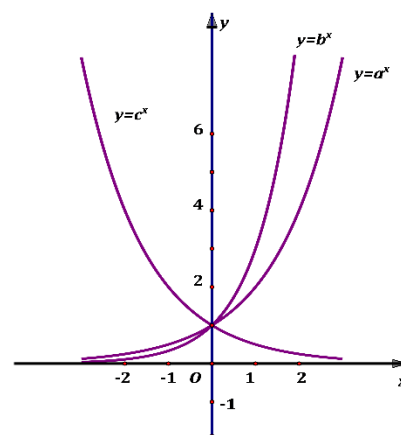
Ví dụ 3: Cho đồ thị của các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ (a, b, c dương và khác 1). Chọn đáp án đúng:

A. $a > b > c$

B. $b > c > a$

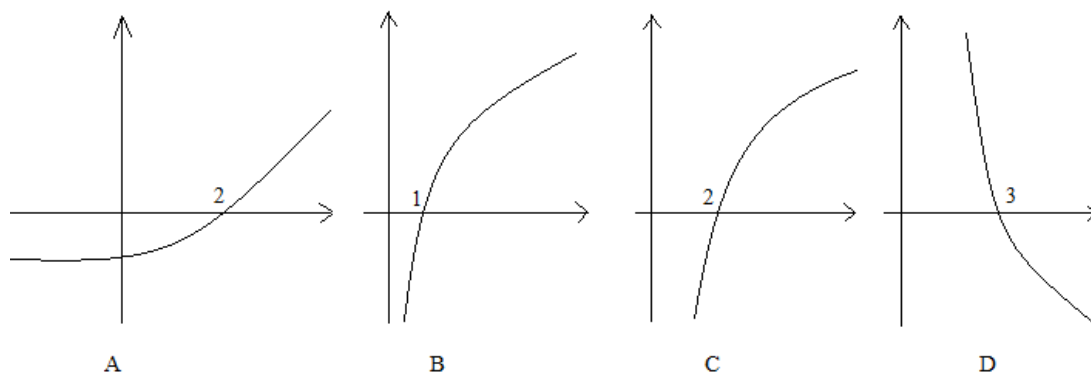
C. $b > a > c$

D. $c > b > a$



Hướng dẫn: Kẻ đường thẳng $x=1$ cắt 3 đồ thị lần lượt tại 3 tung độ là $y=a, y=b, y=c$. Từ đó thấy ngay $b > a > c$.

Ví dụ 4: Đây là đồ thị hàm số $y = \ln(x-1)$

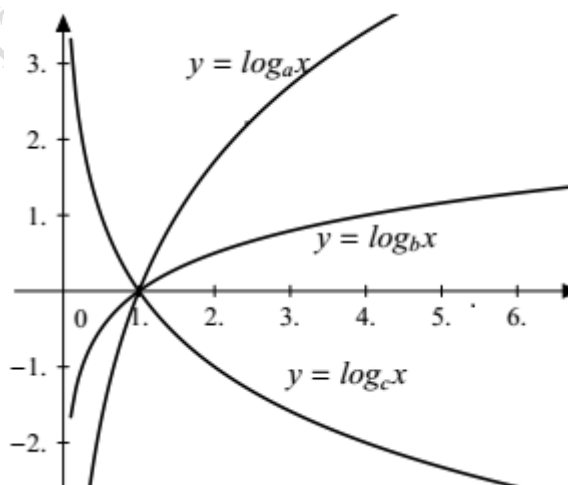


Đáp số: C

Thay $x=2 \Rightarrow y=0$ nên chỉ có thể là A hoặc C. Mặt khác, tập xác định của hàm số là $(1; +\infty)$ nên đồ thị C thỏa mãn.

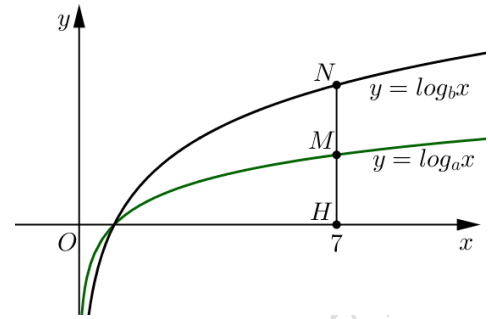
Ví dụ 5: Cho đồ thị của ba hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$ và $y = \log_c x$ (với a, b, c là ba số dương khác 1 cho trước) như hình vẽ bên. Dựa vào đồ thị và các tính chất của lũy thừa hãy so sánh các số a, b, c .

- A. $a > b > c$.
- B. $c > a > b$.
- C. $c > b > a$.
- D. $b > a > c$.



Hướng dẫn: Kẻ đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị lần lượt tại 3 điểm có hoành độ là $x=a, x=b, x=c$. Từ đồ thị thấy ngay $b > a > c$.

Ví dụ 6: Cho các hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Đường thẳng $x = 7$ cắt trục hoành, đồ thị hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_b x$ lần lượt tại H , M và N . Biết rằng $HM = MN$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?



- A. $a = b^7$. B. $a = b^2$. C. $a = 2b$. D. $a = 7b$.

Hướng dẫn: Có $HM = \log_a 7$ và $HN = \log_b 7$. Vậy $HN = 2HM \Leftrightarrow \frac{1}{HM} = \frac{2}{HN}$
 $\Leftrightarrow \log_7 a = 2\log_7 b \Leftrightarrow a = b^2$.

b. Phương trình dạng chứa tham số

Ví dụ 1: Tìm m để phương trình $4^x - m2^{x+1} + 2m = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và $x_1 + x_2 = 3$

Đáp số: $m = 4$

Hướng dẫn: Đặt $t = 2^x$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn $x_1 + x_2 = 3$
 $\Leftrightarrow$ phương trình $t^2 - 2mt + 2m = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt thỏa mãn $t_1 t_2 = 2^{x_1 + x_2} = 8$
 $\Rightarrow 2m = 8 \Rightarrow m = 4$.

Kiểm tra lại thấy $m = 4$ thỏa mãn phương trình ẩn t có hai nghiệm dương phân biệt.

Ví dụ 2: Tìm nguyên dương lớn nhất để phương trình $25^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+2)5^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m+1 = 0$ có nghiệm.

Đáp số: $5 + \frac{1}{3} \leq m \leq 25 + \frac{1}{23}$

Hướng dẫn: Đặt $t = 5^{1+\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow t \in [5; 25]$. Bài toán trở thành “tìm m để phương trình

$t^2 - (m+2)t + 2m+1 = 0$ có nghiệm thuộc $[5; 25] \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 2t + 1}{t - 2}$ có nghiệm thuộc $[5; 25]$.

Phương trình này có nghiệm tương đương với đồ thị hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 2t + 1}{t - 2}$ cắt đường

thẳng $y = m$ tại ít nhất một điểm trên $[5; 25]$. Mà hàm $f(t)$ đồng biến trên $[5; 25]$ nên điều này

xảy ra $\Leftrightarrow \min_{[5; 25]} f(t) \leq m \leq \max_{[5; 25]} f(t) \Leftrightarrow f(5) \leq m \leq f(25) \Leftrightarrow 5 + \frac{1}{3} \leq m \leq 25 + \frac{1}{23}$.

Ví dụ 3: Tìm m để phương trình $\log_3^2 x - (m+2)\log_3 x + 3m - 1 = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1 \cdot x_2 = 27$.

Đáp số: $m = 1$

Hướng dẫn: Đặt $t = \log_3 x$, ta có phương trình $t^2 - (m+2)t + 3m - 1 = 0$. Phương trình ban đầu có 2 nghiệm x_1, x_2 khi và chỉ khi phương trình ẩn t có 2 nghiệm t_1, t_2 . Khi đó, $t_1 = \log_3 x_1$, $t_2 = \log_3 x_2$. Có $t_1 + t_2 = \log_3(x_1 \cdot x_2)$ nên $x_1 \cdot x_2 = 27 \Leftrightarrow t_1 + t_2 = 3 \Leftrightarrow -\frac{b}{a} = 3 \Leftrightarrow m+2 = 3 \Leftrightarrow m = 1$.

Ví dụ 4: Tìm m để phương trình $\log_2(4^x - m) = x + 1$ có đúng 2 nghiệm phân biệt.

Đáp số: $-1 < m < 0$

Hướng dẫn: Phương trình tương đương $4^x - m = 2^{x+1} > 0$ nên không cần điều kiện xác định nữa. Đặt $t = 2^x, t > 0$, ta có $t^2 - 2t - m = 0$. Phương trình ban đầu có đúng 2 nghiệm phân biệt

chỉ khi phương trình ẩn t có 2 nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 0$.

Ví dụ 5: Tìm m để phương trình $\log_{\sqrt{2}}(x-2) = \log_2(mx)$ có 1 nghiệm duy nhất.

Đáp số: $m > 0$

Hướng dẫn: Phương trình tương đương $\begin{cases} x > 2 \\ mx = (x-2)^2 \end{cases}$. Cô lập m từ phương trình ta được

$m = \frac{x^2 - 4x + 4}{x} = x - 4 + \frac{4}{x}$. Điều kiện phương trình có nghiệm duy nhất $x > 2 \Leftrightarrow$ đường thẳng

$y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = x - 4 + \frac{4}{x}$ trên miền $x > 2$ tại duy nhất một điểm. Dễ khảo sát được

hàm $y = x - 4 + \frac{4}{x}$ đồng biến trên $(2; +\infty)$ có giới hạn tại $+\infty$ bằng $+\infty$ nên điều kiện đề bài

thỏa mãn khi và chỉ khi $m > f(2) \Leftrightarrow m > 0$.

Ví dụ 6: Tìm m để bất phương trình $\sqrt{2^x + 7} + \sqrt{2^x - 2} \leq m$ có nghiệm

Đáp số: $m \geq 3$

Hướng dẫn: Bất phương trình $m \geq f(x)$ có nghiệm khi và chỉ khi $m \geq \min_{[1;+\infty)} f(x)$. Với

$$f(x) = \sqrt{2^x + 7} + \sqrt{2^x - 2} \quad (x \geq 1). \text{ Dễ thấy hàm } f(x) \text{ đồng biến trên TXĐ nên } \min_{[1;+\infty)} f(x) = f(1) = 3.$$

Vậy $m \geq 3$.

Ví dụ 7: Tìm m để bất phương trình $\sqrt{3^x + 3} + \sqrt{5 - 3^x} \leq m$ nghiệm đúng $\forall x \in \text{TXD}$

Đáp số: $m \geq 4$

Hướng dẫn: Bất phương trình $m \geq f(x) \quad \forall x \in \text{TXD} \Leftrightarrow m \geq \max_D f(x)$. Đặt $t = 5^x$, bài toán

thành $m \geq \max_{(0;5]} g(t)$ với $g(t) = \sqrt{t+3} + \sqrt{5-t}$. Khảo sát hàm $g(t)$ trên $(0;5]$ sẽ thấy ngay

$$\max_{(0;5]} g(t) = 4. \text{ Vậy } m \geq 4.$$

Ví dụ 8: Tìm m để bất phương trình $4^x + 2^x - m \geq 0$ có nghiệm $x \in [1;2]$

Đáp số: $m \leq 20$

Hướng dẫn: Bất phương trình tương đương $m \leq f(x)$ có nghiệm trên $[1;2] \Leftrightarrow m \leq \max_{[1;2]} f(x)$.

Mà hàm $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên $\max_{[1;2]} f(x) = f(2)$. Vậy $m \leq f(2) = 20$.

Ví dụ 9: Tìm m để phương trình sau có nghiệm $2^{x^2-3x+m} - 2^{x-3} + x^2 - 4x + m + 3 = 0$

Đáp số: $m \leq 1$

Hướng dẫn: Phương trình tương đương với $2^{x^2-3x+m} + (x^2 - 3x + m) = 2^{x-3} + (x-3) \Leftrightarrow f(a) = f(b)$ với $f(x) = 2^x + x$ và $a = x^2 - 3x + m$, $b = x - 3$. Vì hàm $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên phương trình tương đương với $a = b$ tức $x^2 - 3x + m = x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 4x + m + 3 = 0$. Phương trình này có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Ví dụ 10: Tìm m để phương trình sau có đúng 1 nghiệm $2017^{\sqrt{x^2-3mx+1}} - 2017^{x-2} + \sqrt{x^2-3mx} - x + 3 = 0$

Đáp số: $\frac{1}{2} \leq m < 2$.

Hướng dẫn: Phương trình tương đương với $2017^{\sqrt{x^2-3mx+1}} + \sqrt{x^2-3mx} + 1 = 2017^{x-2} + (x-2)$

$\Leftrightarrow f(a) = f(b)$ với $f(x) = 2^x + x$ và $a = \sqrt{x^2-3mx+1}$, $b = x-2$. Vì hàm $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

nên phương trình tương đương với $a = b$ tức $\sqrt{x^2 - 3mx + 1} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2 - 3mx = x^2 - 6x + 9 \end{cases}$.

Phương trình tương đương với $(m-2)x = -3$. Phương trình này phải có nghiệm $x \geq 2$.

Với $m = 2$, phương trình vô nghiệm nên không thỏa mãn đề bài.

Với $m \neq 2$, phương trình có nghiệm $x = -\frac{3}{m-2}$. Nghiệm này thỏa mãn đề bài khi $-\frac{3}{m-2} \geq 2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq m < 2.$$

Ví dụ 11: Tập nghiệm của bất phương trình $2^{mx-1} - 2^{x^2-x} < x^2 - (m+1)x + 1$ nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$

Đáp số: $-3 < m < 1$

Hướng dẫn: Bất phương trình tương đương $2^{mx-1} + (mx-1) < 2^{x^2-x} + x^2 - x \Leftrightarrow 2^a + a < 2^b + b$ với $a = mx-1$ và $b = x^2 - x$. Do hàm $f(x) = 2^x + x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên bất phương trình tương đương với $a < b$ hay $mx-1 < x^2 - x \Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + 1 > 0$. Bất phương trình này nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1$.

Ví dụ 12: Tập nghiệm của bất phương trình $(x+4).9^x - (x+5).3^x + 1 < 0$ là?

Đáp số: $S = (-1; 0)$

Hướng dẫn: Xét phương trình $(x+4).9^x - (x+5).3^x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 1 \\ 3^x = \frac{1}{x+4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

Xét dấu $f(x) = (x+4).9^x - (x+5).3^x + 1$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy $S = (-1; 0)$

Ví dụ 13: Tập nghiệm của bất phương trình $4^{x^2} + (x^2 - 7).2^{x^2} + 12 - 4x^2 < 0$

Đáp số: $S = (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$

Hướng dẫn: Giải phương trình $4^{x^2} + (x^2 - 7) \cdot 2^{x^2} + 12 - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x^2} = 4 \\ 2^{x^2} = 3 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm 1 \end{cases}$

Xét dấu:

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		-1		1		$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$f(x)$		+	0	-	0	+	0	-	0	+

Tập nghiệm $S = (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$

c. Bài toán thực tế

Ví dụ 1. Anh Việt muốn mua một ngôi nhà trị giá 500 triệu đồng sau 3 năm nữa. Vậy ngay từ bây giờ Việt phải gửi tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép là bao nhiêu tiền để có đủ tiền mua nhà, biết rằng lãi suất hàng năm vẫn không đổi là 8% một năm và lãi suất được tính theo kỳ hạn một năm? (kết quả làm tròn đến hàng triệu)

A. 397 triệu đồng. B. 396 triệu đồng. C. 395 triệu đồng. D. 394 triệu đồng.

Hướng dẫn: Gọi S_0 là số tiền Việt gửi ngân hàng. Vì chỉ gửi 1 lần nên số tiền này trải qua 3 năm theo hình thức lãi kép sẽ thu về số tiền cả gốc lẫn lãi là: $S_3 = S_0(1+r)^3$, với $r = 0.08$. Vậy

$$S_3 = 500 \Leftrightarrow 500 = S_0(1.08)^3 \Leftrightarrow S_0 = \frac{500}{1.08^3} = 396.961 \text{ triệu đồng.}$$

Ví dụ 2. Anh Nam gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng Vietcombank. Lãi suất hàng năm không thay đổi là 7,5%/năm và được tính theo kỳ hạn một năm. Nếu anh Nam hàng năm không rút lãi thì sau 5 năm số tiền anh Nam nhận được cả vốn lẫn tiền lãi là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng ngàn)

A. 143562000 đồng. B. 1641308000 đồng.
C. 137500000 đồng. D. 133547000 đồng.

Hướng dẫn: Dạng toán gửi một lần nên sau 5 năm số tiền anh Nam nhận được cả vốn lẫn lãi là $S_5 = S_0 \cdot (1+r)^5 = 100 \times 1.075^5 = 1.435.629,326 \text{ đ}$

Ví dụ 3. Sự tăng trưởng của một loài vi khuẩn tuân theo công thức $f(x) = A \cdot e^{rx}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), x (tính theo giờ) là thời gian tăng trưởng. Biết số lượng vi khuẩn ban đầu có 1000 con và sau 10 giờ là 5000 con. Hỏi sau bao lâu thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 25 lần?

A. 50 giờ. B. 25 giờ. C. 15 giờ. D. 20 giờ.

Đáp án: Ta có $5000 = 1000 \cdot e^{10r} \Rightarrow e^{10r} = 5$; do đó số lượng vi khuẩn tăng gấp 25 lần thì

$$e^{rx} = 25 \Leftrightarrow e^{rx} = (e^{10r})^2 \Leftrightarrow x = 20$$

Ví dụ 4: Tỷ lệ tăng dân số hàng năm ở Việt Nam được duy trì ở mức 1,05%. Theo số liệu của Tổng Cục Thống Kê, dân số của Việt Nam năm 2014 là 90.728.900 người. Với tốc độ tăng dân số như thế thì vào năm 2030 thì dân số của Việt Nam là bao nhiêu?

A. 107232573 người.

B. 107232574 người.

C. 105971355 người.

D. 106118331 người.

Hướng dẫn: Tương tự bài toán lãi kép gửi 1 lần. Sau 16 năm dân số Việt Nam khoảng $S_{16} = 90.728.900 \times 1.0105^{16} = 107232574$ người.

Ví dụ 5: Một công nhân làm việc cho một công ty được tăng lương cứ 3 năm tăng 10% so với mức lương trước. Anh ta mỗi tháng trích ra 20% lương của mình hàng tháng để gửi tiết kiệm theo hình thức lãi kép 6%/tháng thì sau 48 tháng anh ta thu được 100 triệu tiền lãi từ ngân hàng. Hỏi lương khởi điểm của anh ấy là bao nhiêu?

Đáp số: $x = 39.32126263$

Hướng dẫn: Gọi lương khởi điểm của anh công nhân là x thì 36 tháng đầu mỗi tháng anh ta gửi vào ngân hàng số tiền $\frac{x}{5}$. Do đó, sau 36 tháng số tiền trong ngân hàng của anh ta là:

$$S_{36} = \frac{x}{5}(1+r)^{36} + \dots + \frac{x}{5}(1+r) = \frac{x(1+r)^{37} - (1+r)}{5r}$$

Từ tháng thứ 37 đến hết tháng 48 (12 tháng) lương anh ta tăng 10% tức $1,1x$ nên anh ta gửi vào ngân hàng hàng tháng $\frac{1,1x}{5}$. Vậy, sau 48 tháng số tiền trong ngân hàng của anh ta là:

$$\begin{aligned} S_{48} &= S_{36} \cdot (1+r)^{12} + \frac{1,1x}{5} \left((1+r)^{12} + (1+r)^{11} + \dots + (1+r) \right) = S_{36} \cdot (1+r)^{12} + \frac{1,1x(1+r)^{13} - (1+r)}{5r} \\ &= \frac{x(1+r)^{49} - (1+r)^{13}}{5r} + \frac{1,1x(1+r)^{13} - (1+r)}{5r} \end{aligned}$$

Vậy số tiền lãi anh ta thu được là

$$F = \frac{x(1+r)^{49} - (1+r)^{13}}{5r} + \frac{1,1x(1+r)^{13} - (1+r)}{5r} - 36 \frac{x}{5} - 12 \frac{1,1x}{5}.$$

Giải phương trình $F = 100 \Rightarrow x = 39.32126263$ triệu

Ví dụ 6: Một người lần đầu gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với kì hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý theo hình thức lãi kép. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kỳ

hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được 1 năm sau khi gửi tiền là bao nhiêu?

Đáp số: 212,283 triệu

Hướng dẫn: 100 triệu lần đầu trải qua 4 chu kỳ nên cả vốn lẫn lãi thu được là $100.(1+2\%)^4$. 100 triệu gửi lần 2 trải qua 2 chu kỳ nên số tiền thu được là $100.(1+2\%)^2$. Vậy tổng số tiền nhận được là $100.(1+2\%)^4 + 100.(1+2\%)^2 \approx 212,283$ triệu đồng.

Ví dụ 7: Một người gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất ban đầu 4%/năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Cứ sau một năm lãi suất tăng 0,3% so với năm trước. Hỏi sau 4 năm tổng số tiền người đó nhận được bao nhiêu?

Đáp số: 117.067 triệu đồng.

Hướng dẫn: Gửi 1 lần với các lãi suất khác nhau thì sau n chu kỳ, số tiền cả gốc lẫn lãi là $S_n = S_0(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_n)$. Vì lãi suất tăng 0,3% mỗi năm nên r_n là cấp số nhân công bội $q = 1.003$. Vậy số tiền sau 4 năm người này nhận được là $S_4 = 100(1+r_1)(1+q.r_1)(1+q^2.r_1)(1+q^3.r_1) = 117,067$ triệu đồng.

Ví dụ 8: Một người đi mua chiếc xe máy với giá 90 triệu đồng. Biết rằng cứ sau một năm giá trị của chiếc xe chỉ còn 60%. Hỏi sau bao nhiêu năm thì giá trị chiếc xe chỉ còn 10 triệu.

Đáp số: 4,3 năm

Hướng dẫn: Gọi thời gian cần tính là t (năm) thì : $10 = 90.(0,6)^t \Leftrightarrow t \approx 4,3$ năm.

Ví dụ 9: Độ chấn động M của một cơn địa chấn được đo bằng thang Richter xác định bởi công

thức: $M = \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$, trong đó I là biên độ tối đa được đo bằng địa kế chấn, I_0 là biên độ

chuẩn. Tính độ chấn động theo thang Richter trận động đất ở California (Mỹ) năm 1992 có biên độ tối đa $I = 3,16.10^7 I_0$ (tính chính xác tới hàng phần trăm).

Đáp số: 7,5 Richter

Hướng dẫn: Thay vào công thức thôi!

Ví dụ 10: Anh Nam mong muốn rằng sau 6 năm sẽ có 2 tỷ để mua nhà. Hỏi anh Nam phải gửi vào ngân hàng một khoản tiền tiền tiết kiệm như nhau hàng năm gần nhất với giá trị nào sau đây, biết rằng lãi suất của ngân hàng là 8% /năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn.

Đáp án: Gọi số tiền anh Nam cần gửi hàng năm là m (triệu đồng). Ta có:

$$m(1+8\%)^6 + m(1+8\%)^5 + m(1+8\%)^4 + m(1+8\%)^3 + m(1+8\%)^2 + m(1+8\%) = 2000$$

$$\Leftrightarrow m \left[\frac{(1+8\%)(1-(1+8\%)^6)}{1-(1+8\%)} \right] = 2000 \Leftrightarrow m \approx 252,436 \text{ triệu đồng.}$$

Ví dụ 11: Một người muốn sau 4 tháng có 1 tỷ đồng để xây nhà. Hỏi người đó phải gửi mỗi tháng là bao nhiêu tiền (như nhau). Biết lãi suất 1 tháng là 1%.

Đáp án: Gọi số tiền cần gửi hàng tháng là m (triệu đồng). Ta có:

$$m(1+1\%)^4 + m(1+1\%)^3 + m(1+1\%)^2 + m(1+1\%) = 1000$$

$$\Leftrightarrow m \left[\frac{(1+1\%)(1-(1+1\%)^4)}{1-(1+1\%)} \right] = 1000 \Leftrightarrow m \approx 243,843 \text{ triệu đồng.}$$

Ví dụ 12: Bà Nguyễn vay ngân hàng 50 triệu đồng và trả góp trong vòng 4 năm với lãi suất 1,15% mỗi tháng. Sau đúng một tháng kể từ ngày vay bà sẽ hoàn nợ cho ngân hàng và số tiền hoàn nợ mỗi tháng là như nhau. Hỏi mỗi tháng bà phải trả bao nhiêu tiền cho ngân hàng?

Đáp số: 1,36 triệu

Hướng dẫn: Gọi T_n là số tiền còn lại sau tháng thứ n và m (triệu đồng) là số tiền bà Nguyễn phải trả cho ngân hàng mỗi tháng. Ta có:

Số nợ 50 triệu sau n chu kỳ thành khoản nợ $50(1+r)^n$ với $r = 1,15\%$.

Sau 1 tháng kể từ ngày vay, trả nợ m triệu, số tiền này sau $n-1$ chu kỳ thành khoản trả: $m(1+r)^{n-1}$

Lần 2 trả nợ cũng m triệu sau $n-2$ chu kỳ thành khoản trả $m(1+r)^{n-2}$. Tương tự đến khi trả lần cuối m triệu. Vậy số tiền còn nợ sau khi trả lần cuối là: $T_n = 50(1+r)^n - \sum_{x=0}^{n-1} m(1+r)^x$

Do bà trả góp trong 4 năm nên $T_{48} = 0 \Leftrightarrow 50.(1+1,15\%)^{48} = m.(1+1,15\%)^{47} + \dots$

$$+ m.(1+1,15\%) + m \Leftrightarrow 50.(1+1,15\%)^{48} = m. \frac{(1-(1+1,15\%)^{48})}{1-(1+1,15\%)} \Leftrightarrow m \approx 1,36 \text{ triệu đồng.}$$

3. NGUYÊN HÀM – TÍCH PHÂN

a. Đổi biến số đặc biệt

- Áp dụng công thức hàm hợp bậc nhất: $I = \int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$

Ví dụ 1: Cho $\int_1^3 f(x)dx = 2$. Tính $I = \int_0^1 f(2x+1)dx$

Đáp số: 1

Hướng dẫn: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì giả thiết cho ta $F(3) - F(1) = 2$. Cần tính $I = \int_0^1 f(2x+1)dx = \frac{1}{2} F(x) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (F(3) - F(1)) = 1$.

Ví dụ 2: Cho $\int_0^1 f(5x)dx = 2$. Tính $I = \int_0^5 f(x)dx$

Đáp số: 10

Hướng dẫn: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì giả thiết cho ta $\frac{1}{5} F(5x) \Big|_0^1 = 2$
 $\Leftrightarrow F(5) - F(0) = 10$. Cần tính $I = F(5) - F(0)$, vậy $I = 10$.

Ví dụ 3: Cho $\int_0^1 f(x)dx = 2$. Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x) \cos 2x dx$

Đáp số: 1

Hướng dẫn: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì giả thiết cho ta $F(1) - F(0) = 2$.

Xét cần tính I : Đặt $t = \sin 2x \Rightarrow dt = 2 \cos 2x dx$, đổi cận mới được $I = \frac{1}{2} \int_0^1 f(t) dt$
 $= \frac{1}{2} (F(1) - F(0)) = 1$.

Ví dụ 4: Cho $\int_0^{\ln 2} f(e^x) e^x dx = 4$. Tính $I = \int_1^2 f(x) dx$

Đáp số: 4

Hướng dẫn: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$. Ở giả thiết đặt $t = e^x$ ta có

$$4 = \int_1^2 f(t)dt = F(2) - F(1). \text{ Cái cần tính } I = F(2) - F(1) \text{ nên } I = 4.$$

Ví dụ 5: Cho $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_0^3 f(x)dx = 5$. Tính $I = \int_1^3 f(x)dx$

Đáp số: 3

Hướng dẫn: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì giả thiết cho ta: $F(1) - F(0) = 2$ (1) và $F(3) - F(0) = 5$ (2). Đại lượng cần tính chính là $I = F(3) - F(1)$. Vậy lấy (2) - (1) được $I = 3$.

Ví dụ 6: Cho $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_1^3 f(2x-1)dx = 2$. Tính $I = \int_0^5 f(x)dx$

Đáp số: 6

Hướng dẫn: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì giả thiết cho ta: $F(1) - F(0) = 2$ (1) và $\frac{1}{2}F(2x-1)\Big|_1^3 = 2 \Leftrightarrow F(5) - F(1) = 4$ (2). Cần tính chính là $I = F(5) - F(0)$. Vậy cộng (1) và (2) được $I = 6$.

Ví dụ 7: Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x) \cos 2x dx = 1$ và $\int_1^3 f(-x+1)dx = 2$. Tính $I = \int_{-2}^1 f(x)dx$

Đáp số: 4

Hướng dẫn: Gọi $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ thì giả thiết cho ta:

$$\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x) d(\sin 2x) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} F(\sin 2x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 \Leftrightarrow F(1) - F(0) = 2 \text{ (1) và } \frac{F(-x+1)}{-1} \Big|_1^3 = 2$$

$$\Leftrightarrow F(-2) - F(0) = -2 \text{ (2). Đại lượng cần tính chính là } I = F(1) - F(-2). \text{ Vậy lấy (1)-(2) được } I = 4.$$

- Áp dụng công thức từng phần: $\int_a^b u.v' dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b v.u' dx$

Ví dụ 1: Cho $\int_0^1 (x+1) f'(x)dx = 10$ và $2f(1) - f(0) = 2$. Tính $I = \int_0^1 f(x)dx$

Đáp số: $I = -8$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức từng phần với $u = x+1$ và $v' = f'(x)$, ta có:

$$10 = \int_0^1 (x+1)f'(x)dx = (x+1)f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = 2f(1) - f(0) - I = 2 - I \Rightarrow I = 2 - 10 = -8$$

Ví dụ 2: Cho $\int_0^1 (5x+1)f'(x)dx = 6$ và $6f(1) - f(0) = 3$. Tính $I = \int_0^1 f(x)dx$

Đáp số: $I = -\frac{3}{5}$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức từng phần với $u = 5x+1$ và $v' = f'(x)$, ta có

$$6 = (5x+1)f(x)\Big|_0^1 - 5\int_0^1 f(x)dx = 6f(1) - f(0) - 5I = 3 - 5I \Rightarrow I = -\frac{3}{5}.$$

Ví dụ 3: Cho $\int_0^1 (5x+1)f'(2x)dx = 6$ và $3f(2) - \frac{1}{2}f(0) = 3$. Tính $I = \int_0^2 f(x)dx$

Đáp số: $I = -\frac{12}{5}$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức từng phần với $u = 5x+1$ và $v' = f'(2x)$ ta có

$$6 = (5x+1)\frac{f(2x)}{2}\Big|_0^1 - \frac{5}{2}\int_0^1 f(2x)dx = 3f(2) - \frac{1}{2}f(0) - \frac{5}{2}\int_0^1 f(2x)dx = 3 - \frac{5}{2}\int_0^1 f(2x)dx$$

$$\text{Vậy } \int_0^1 f(2x)dx = \frac{-6}{5} \Rightarrow \frac{1}{2}(F(2) - F(0)) = \frac{-6}{5} \Rightarrow F(2) - F(0) = -\frac{12}{5}$$

$$\text{Mà } I = \int_0^2 f(x)dx = F(2) - F(0). \text{ Vậy } I = -\frac{12}{5}.$$

Ví dụ 4: Cho $\int_0^1 e^x \cdot f'(x)dx = 5$ và $e \cdot f(1) - f(0) = 2$. Tính $I = \int_0^1 e^x \cdot f(x)dx$

Đáp số: $I = -3$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức từng phần cho $u = e^x$ và $v' = f'(x)$ ta có $5 = \int_0^1 e^x \cdot f'(x)dx$

$$= e^x f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x f(x)dx \Rightarrow 5 = e \cdot f(1) - f(0) - I \Rightarrow I = 2 - 5 = -3$$

Ví dụ 5: Cho $\int_0^1 e^{3x} \cdot f'(2x) dx = 5$ và $\frac{1}{2}(e^3 \cdot f(2) - f(0)) = 1$. Tính $I = \int_0^1 e^{3x} f(2x) dx$

Đáp số: $I = -\frac{8}{3}$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức từng phần cho $u = e^{3x}$ và $v' = f'(2x)$ ta có

$$5 = \int_0^1 e^{3x} \cdot f'(2x) dx = e^{3x} \frac{f(2x)}{2} \Big|_0^1 - \frac{3}{2} \int_0^1 e^{3x} f(2x) dx = \frac{1}{2}(e^3 \cdot f(2) - f(0)) - \frac{3}{2} I = 1 - \frac{3}{2} I$$

$$\Rightarrow I = -\frac{8}{3}.$$

Ví dụ 6: Cho $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm $g(x)$ và $3G(1) - G(0) = 3$. Biết

$$\int_0^1 (2x+1) \cdot g(x) dx = 5. \text{ Tính } I = \int_0^1 G(x) dx.$$

Đáp số: $I = -1$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức từng phần với $u = 2x+1$ và $v' = g(x)$ ta có

$$5 = \int_0^1 (2x+1) \cdot g(x) dx = (2x+1)G(x) \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 G(x) dx = 3G(1) - G(0) - 2I = 3 - 2I \Rightarrow I = -1$$

- Áp dụng công thức $G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt \Rightarrow G'(x) = f(v(x)) \cdot v'(x) - f(u(x)) \cdot u'(x)$

Ví dụ 1: Cho $G(x) = \int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt$. Tính $G'(x)$

Đáp số: $2x \sin|x|$

Hướng dẫn: $G'(x) = \sin \sqrt{x^2} \cdot (x^2)' = \sin|x| \cdot 2x = 2x \sin|x|$

Ví dụ 2: Xác định cực trị của hàm số $G(x) = \int_x^{2x} t \ln t dt$ với $x \in (0; +\infty)$

Đáp số: cực tiểu tại $x = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$

Hướng dẫn: Có $G'(x) = 2x \ln 2x - x \ln x = x(4 \ln 2x - \ln x)$. $G'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (l)} \\ x = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \end{cases}$.

Để dàng kiểm tra thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$

Ví dụ 3: Cho biết $\int_0^{x^2} f(t)dt = x \cdot \cos(\pi x)$. Tính $f(9)$

Đáp số: $-\frac{1}{6}$

Hướng dẫn: Đặt $G(x) = x \cdot \cos(\pi x) = \int_0^{x^2} f(t)dt \Rightarrow G'(x) = f(x^2) \cdot (x^2)' = f(x^2) \cdot 2x$. Vậy

$$G'(3) = 6 \cdot f(9) \Rightarrow f(9) = \frac{1}{6} \frac{d}{dx} (x \cdot \cos(\pi x)) \Big|_{x=3} = -1. \text{ Vậy } f(9) = -\frac{1}{6}$$

- Áp dụng công thức đặc biệt $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$

Ví dụ 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(-x) + 2f(x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$. Tính

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$$

Đáp số: $I = \frac{2}{3}$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$, ta có $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(0-x)dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(-x)dx.$$

$$\text{Từ } f(-x) + 2f(x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (f(-x) + 2f(x))dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \Rightarrow 3I = 2 \Rightarrow I = \frac{2}{3}$$

Ví dụ 2: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(-x) = \sqrt{2 + 2\cos 2x}, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\text{Tính } I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$$

Đáp số: $I = 6$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$, ta có $I = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)dx$

$$= \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(0-x)dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(-x)dx .$$

$$\text{Từ } f(-x) + f(x) = \sqrt{2 + 2\cos 2x}, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (f(-x) + f(x))dx = \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{2 + 2\cos 2x}dx$$

$$\Rightarrow 2I = 12 \Rightarrow I = 6$$

Ví dụ 3: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + f(1-x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Tính

$$I = \int_0^1 f(x)dx$$

$$\text{Đáp số: } I = \frac{\ln 2}{4}$$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$, ta có $I = \int_0^1 f(x)dx$
 $= \int_0^1 f(1-x)dx .$

$$\text{Từ giả thiết suy ra } 2I = \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{\ln 2}{2} \Rightarrow I = \frac{\ln 2}{4}$$

Ví dụ 4: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f(x) + 2f(5-x) = x\sqrt{25-x^2}$. Tính $I = \int_0^5 f(x)dx$

Đáp số: $I = \frac{125}{9}$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$, ta có $I = \int_0^5 f(x)dx = \int_0^5 f(5-x)dx$.

Từ giả thiết suy ra $3I = \int_0^5 x\sqrt{25-x^2}dx = \frac{125}{3} \Rightarrow I = \frac{125}{9}$

Ví dụ 5: Cho $f(x)$ là hàm chẵn liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^1 f(x)dx = 2$. Tính $I = \int_{-1}^1 f(x)dx$

Đáp số: $I = 4$

Hướng dẫn: Sử dụng tính chất “nếu hàm $f(x)$ là hàm chẵn thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ ” nên ta có ngay $I = 4$

Ví dụ 6: Cho $f(x)$ là hàm chẵn liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_0^2 f(x)dx = 3$. Tính $I = \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{2^x+1}dx$

Đáp số: $I = 3$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$, ta có $I = \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{2^x+1}dx = \int_{-2}^2 \frac{f(-x)}{2^{-x}+1}dx = \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{\frac{1}{2^x}+1}dx$ (do hàm chẵn) $= \int_{-2}^2 \frac{2^x}{2^x+1} f(x)dx$.

Vậy $2I = \int_{-2}^2 \frac{f(x)}{2^x+1}dx + \int_{-2}^2 \frac{2^x}{2^x+1} f(x)dx = \int_{-2}^2 f(x)dx = 2\int_0^2 f(x)dx \Rightarrow I = \int_0^2 f(x)dx = 3$

Ví dụ 7: Cho $f(x)$ là hàm chẵn liên tục trên $\mathbb{R}$ và $\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{2^x+1}dx = 10$. Tính $I = \int_0^1 f(x)dx$

Đáp số: $I = 10$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$, ta có $10 = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{2^x+1} dx$

$$= \int_{-1}^1 \frac{f(-x)}{2^{-x}+1} dx = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\frac{1}{2^x}+1} dx \text{ (do hàm chẵn)} = \int_{-1}^1 \frac{2^x}{2^x+1} f(x) dx.$$

Vậy $20 = \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{2^x+1} dx + \int_{-1}^1 \frac{2^x}{2^x+1} f(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) dx = 2 \int_0^1 f(x) dx \Rightarrow I = \int_0^1 f(x) dx = 10$

Ví dụ 8: Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2017} x}{\sin^{2017} x + \cos^{2017} x} dx$

Đáp số: $I = \frac{\pi}{4}$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$, ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2017} x}{\sin^{2017} x + \cos^{2017} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2017} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}{\sin^{2017} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \cos^{2017} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2017} x}{\cos^{2017} x + \sin^{2017} x} dx$$

Vậy $2I = I + I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2017} x}{\sin^{2017} x + \cos^{2017} x} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2017} x}{\cos^{2017} x + \sin^{2017} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$

Ví dụ 9: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^{\pi} f(\sin x) dx = 5$. Tính $I = \int_0^{\pi} x \cdot f(\sin x) dx$

Đáp số: $I = \frac{5\pi}{2}$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$, ta có $I = \int_0^{\pi} x \cdot f(\sin x) dx$

$$= \int_0^{\pi} (\pi - x) \cdot f(\sin(\pi - x)) dx = \int_0^{\pi} (\pi - x) \cdot f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\pi} f(\sin x) dx - \int_0^{\pi} x \cdot f(\sin x) dx = 5\pi - I$$

$$\Rightarrow 2I = 5\pi \Rightarrow I = \frac{5\pi}{2}.$$

Ví dụ 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^{\pi} f(\sin x) dx = 5$. Tính

$$I = \int_0^{\pi} (2x+1) \cdot f(\sin x) dx$$

Đáp số: $I = 5(\pi+1)$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$, ta có $I = \int_0^{\pi} (2x+1) \cdot f(\sin x) dx$
 $= \int_0^{\pi} (2(\pi-x)+1) \cdot f(\sin(\pi-x)) dx = \int_0^{\pi} (2\pi-2x+1) \cdot f(\sin x) dx = \int_0^{\pi} (2\pi+2-2x-1) \cdot f(\sin x) dx$
 $= (2\pi+2) \int_0^{\pi} f(\sin x) dx - \int_0^{\pi} (2x+1) \cdot f(\sin x) dx = 10(\pi+1) - I \Rightarrow 2I = 10(\pi+1) \Rightarrow I = 5(\pi+1)$

Ví dụ 11: Cho $f(x)$ là hàm liên tục trên $[0;3]$ và $f(x)f(3-x)=1$ với mọi $x \in [0;3]$. Tính

$$K = \int_0^3 \frac{dx}{1+f(x)}$$

Đáp số: $K = \frac{3}{2}$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx$, ta có $K = \int_0^3 \frac{dx}{1+f(x)}$
 $= K = \int_0^3 \frac{dx}{1+f(3-x)} \Rightarrow 2K = \int_0^3 \frac{dx}{1+f(x)} + \int_0^3 \frac{dx}{1+f(3-x)}$
 $= \int_0^3 \frac{2+f(x)+f(3-x)}{1+f(x)+f(3-x)+f(x) \cdot f(3-x)} dx = \int_0^3 \frac{2+f(x)+f(3-x)}{2+f(x)+f(3-x)} dx = \int_0^3 dx = 3$ (do
 $f(x)f(3-x)=1$). Vậy $2K = 3 \Rightarrow K = \frac{3}{2}$.

b. Ứng dụng

- Thể tích biệt diện tích thiết diện

Ví dụ 1: Tính thể tích khối giới hạn bởi 2 mặt phẳng $x=0, x=\pi$ và thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với Ox là đường tròn bán kính $\sqrt{\sin x}$.

Đáp số: $V = 2\pi$

Hướng dẫn: Diện tích thiết diện là $S(x) = \pi r^2 = \pi \sin x$. Vậy $V = \int_0^\pi \pi \sin x dx = 2\pi$.

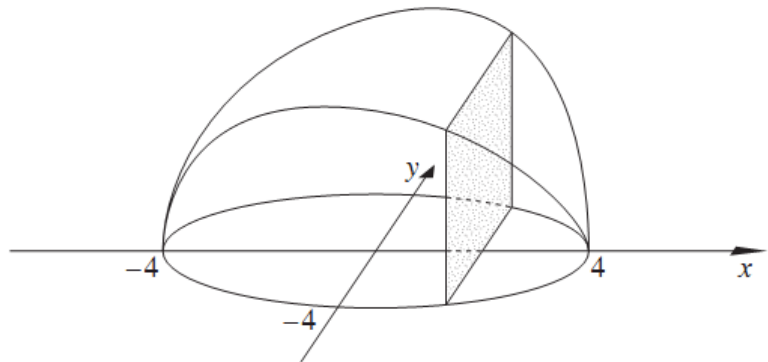
Ví dụ 2: Tính thể tích khối giới hạn bởi 2 mặt phẳng $x = 0, x = 4$ và thiết diện cắt bởi mặt phẳng vuông góc với Ox là hình vuông có cạnh là $x.e^x$.

Đáp số: $V = 6.e^8 + \frac{e^8 - 1}{4}$

Hướng dẫn: Thiết diện là hình vuông cạnh $x.e^x$ nên diện tích thiết diện là $S(x) = (x.e^x)^2$. Vậy

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 x^2 \cdot e^{2x} dx = x^2 \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^4 - \int_0^4 e^{2x} \cdot x dx = 8.e^8 - \left(x \frac{e^{2x}}{2} \Big|_0^4 - \frac{1}{2} \int_0^4 e^{2x} dx \right) = 8.e^8 - 2.e^8 + \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^4 \\ &= 6.e^8 + \frac{e^8 - 1}{4}. \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đây là hình tròn giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 16$ (nằm trong mặt phẳng Oxy), cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là hình vuông. Tính thể tích của vật thể.

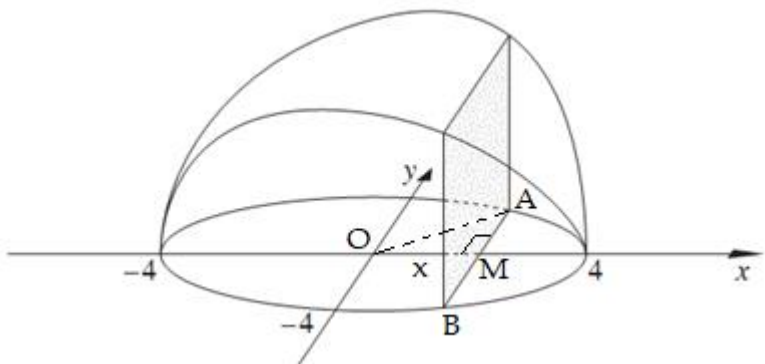


Đáp số: $V = \frac{1024}{3}$

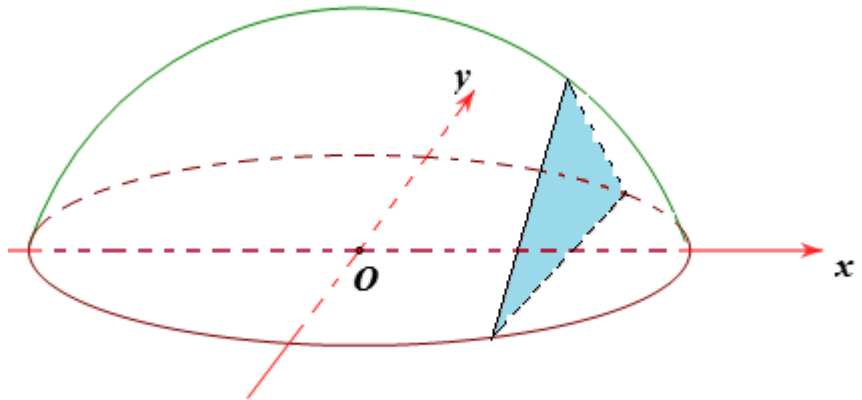
Hướng dẫn: Gọi x là vị trí mặt phẳng thiết diện vuông góc với Ox.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } AM &= \sqrt{OA^2 - OM^2} \\ &= \sqrt{16 - x^2} \Rightarrow AB = 2\sqrt{16 - x^2} \\ &\Rightarrow S(x) = 4(16 - x^2). \text{ Vậy} \end{aligned}$$

$$V = \int_{-4}^4 4(16 - x^2) dx = \frac{1024}{3}.$$



Ví dụ 4: Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đây là hình tròn giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 16$ (nằm trong mặt phẳng Oxy), cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là tam giác đều. Tính thể tích của vật thể



Đáp số: $V = \frac{256\sqrt{3}}{2}$

Hướng dẫn :

Đặt $OM = x$ suy ra

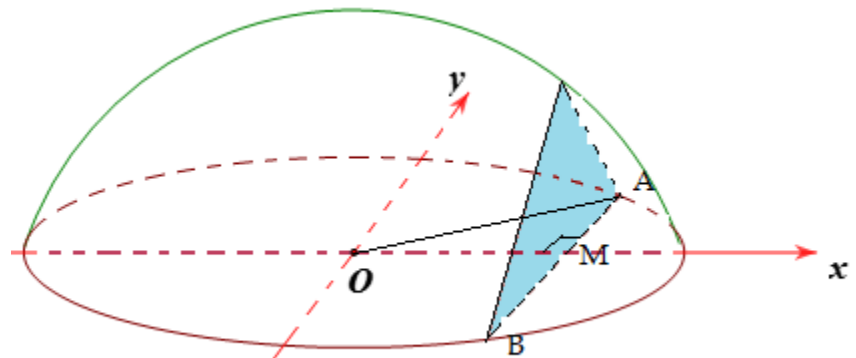
$$AM = \sqrt{16 - x^2}$$

$\Rightarrow AB = 2\sqrt{16 - x^2}$. Do thiết diện là tam giác đều nên

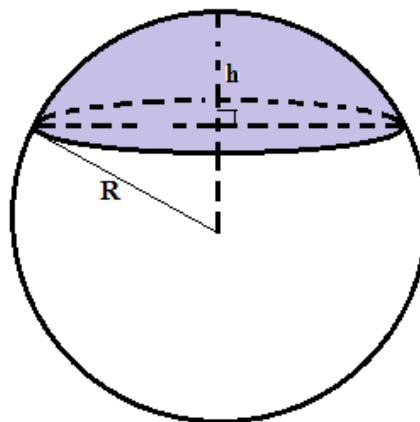
$$S(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(2\sqrt{16 - x^2} \right)^2$$

$$= \sqrt{3}(16 - x^2). \text{ Vậy}$$

$$V = \int_{-4}^4 \sqrt{3}(16 - x^2) dx = \frac{256\sqrt{3}}{2}$$



Ví dụ 5: Tính thể tích phần bôi đậm trong hình vẽ

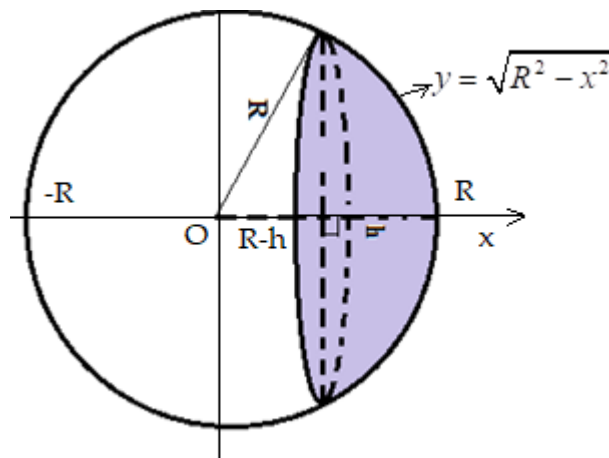


Đáp số: $V = \pi \left(Rh^2 - \frac{2}{3} h^3 \right)$

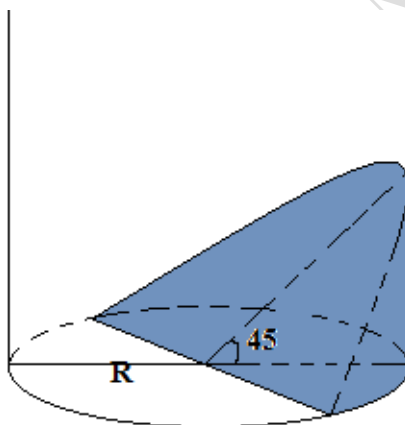
Hướng dẫn: Xét tọa độ như hình vẽ. Bài toán trở thành xoay đường tròn quanh Ox. Do đó, thể tích cần tính được tính theo công thức

$$V = \pi \int_{R-h}^R (R^2 - x^2) dx$$

$$= \pi \left(R^2 h - \frac{1}{3} (R^3 - (R-h)^3) \right) = \pi \left(Rh^2 - \frac{2}{3} h^3 \right)$$



Ví dụ 6: Tính thể tích khối in đậm trong hình vẽ sau



Đáp số: $V = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha$

Hướng dẫn: Gắn tọa độ như hình. Xét mặt phẳng qua M vuông góc với Ox tại M, cắt khối cần tính thể tích theo thiết diện là tam giác vuông SHM vuông tại H. Ta có

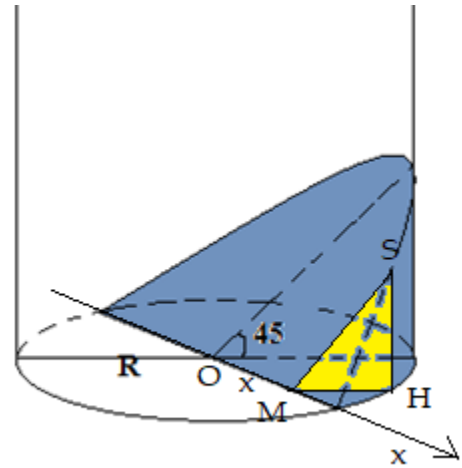
$$MH = \sqrt{OH^2 - OM^2} = \sqrt{R^2 - x^2} \Rightarrow SH = MH \cdot \tan \alpha$$

(trường hợp này $\alpha = 45^\circ$). Vậy diện tích thiết diện

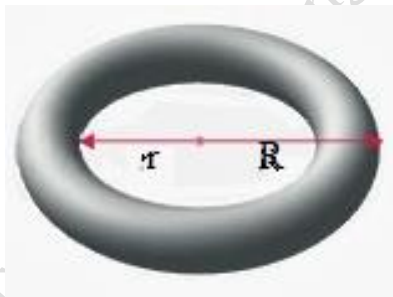
$$S(x) = \frac{1}{2} SH \cdot MH = \frac{1}{2} \tan \alpha \cdot MH^2 = \frac{1}{2} \tan \alpha (R^2 - x^2). \text{ Vậy}$$

$$V = \int_{-R}^R S(x) dx = \frac{\tan \alpha}{2} \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx$$

$$= \frac{\tan \alpha}{2} \left(2R^3 - \frac{1}{3} (2R^3) \right) = \frac{2}{3} R^3 \tan \alpha.$$



Ví dụ 7: Hình chiếc phao bơi hình xuyến với bán kính vòng trong là $r = 25$ cm, bán kính vòng ngoài $R = 50$ cm. Tính thể tích của chiếc phao bơi

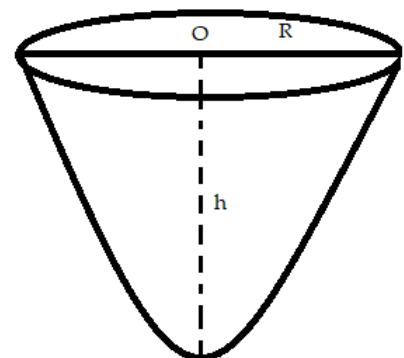


Đáp số: $V = 2\pi^2 \left(\frac{R-r}{2} \right)^2 \left(\frac{R+r}{2} \right)$

Hướng dẫn: Gọi d là khoảng cách từ tâm hình xuyến đến tâm đường tròn thiết diện và r_t là bán kính đường tròn thiết diện, thì ta có công thức

$$V = \pi r_t^2 \cdot 2\pi d = 2\pi^2 \left(\frac{R-r}{2} \right)^2 \left(\frac{R+r}{2} \right).$$

Ví dụ 8: Một chiếc chảo tròn xoay có thiết diện qua trục là parabol như hình vẽ. Tính thể tích chiếc chảo.



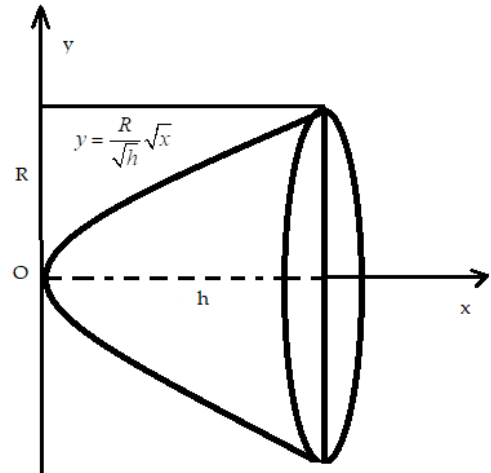
Đáp số: $V = \frac{1}{2} \pi R^2 h$

Hướng dẫn: Gắn hệ tọa độ như hình vẽ thì dễ dàng lập

đương phương trình Parabol là $y = \frac{R}{\sqrt{h}} \sqrt{x}$. Xoay

Parabol này quanh Ox được khối tròn xoay cần tính.

$$\text{Vậy } V = \pi \int_0^h \frac{R^2}{h} x dx = \frac{1}{2} \pi R^2 h.$$



- Vật tròn xoay

Ví dụ 1: Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường: $y = x \ln x$, $y = 0$, $x = e$. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi H quay quanh Ox.

$$\text{Đáp số: } V = \frac{\pi}{27} (5e^3 - 2)$$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. Có $x \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Vậy

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^e (x \ln x)^2 dx = \pi \int_1^e x^2 \ln^2 x dx = \pi \left(\ln^2 x \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e 2x^2 \ln x dx \right) \\ &= \pi \frac{e^3}{3} - \frac{2\pi}{3} \left(\ln x \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_1^e - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx \right) = \frac{\pi e^3}{9} + \frac{2\pi}{27} (e^3 - 1) = \frac{\pi}{27} (5e^3 - 2) \end{aligned}$$

Ví dụ 2: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = \frac{1}{3}x^2$ quay xung quanh trục Ox. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành.

$$\text{Đáp số: } V = \frac{29\sqrt{3}}{5} \pi$$

Hướng dẫn: Thấy cả hai đồ thị cùng nằm một phía so với Ox (do cùng dương). Hoành độ giao

$$\text{điểm 2 đồ thị là } x = \pm\sqrt{3}. \text{ Vậy } V = \pi \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left| (4 - x^2) - \frac{1}{9}x^4 \right| dx = \pi \left| 6\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{5} \right| = \frac{29\sqrt{3}}{5} \pi$$

Ví dụ 3: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị $y = -x^2 + 4x$, $y = x + 2$. Tính thể tích khối tròn xoay có được khi xoay (H) quanh Ox.

Đáp số: $V = \frac{6\pi}{5}$

Hướng dẫn: Xét phương trình hoành độ giao điểm $-x^2 + 4x = x + 2 \Leftrightarrow x = 1; x = 2$. Trong khoảng (1; 2) cả 2 đồ thị đều nằm trên Ox nên ta có: $V = \pi \int_1^2 \left| (-x^2 + 4x)^2 - (x + 2)^2 \right| dx = \frac{6\pi}{5}$

Ví dụ 4: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 2$. Tính thể tích khối tròn xoay có được khi xoay (H) quanh Ox.

Đáp số: $= \pi(2\ln^2 2 - 4\ln 2 + 2)$

Hướng dẫn: Giải phương trình hoành độ giao điểm $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Áp dụng công thức thể tích ta có: $V = \pi \int_1^2 (\ln x)^2 dx = \pi \left(x \cdot \ln^2 x \Big|_1^2 - 2 \int_1^2 \ln x dx \right) = \pi \left(2\ln^2 2 - 2(x \ln x - x) \Big|_1^2 \right) = \pi(2\ln^2 2 - 4\ln 2 + 2)$

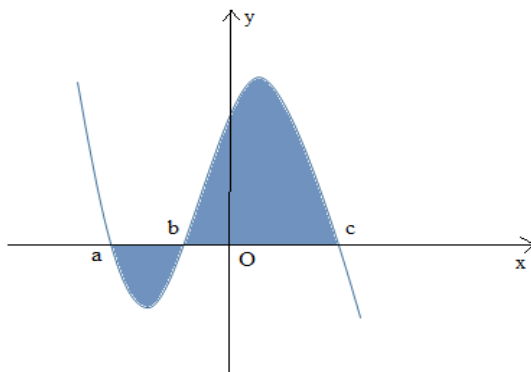
Ví dụ 5: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt{9 - (x - 1)^2}$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh Ox.

Đáp số: $V = 36\pi$.

Hướng dẫn: Phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{9 - (x - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow x = -2; x = 4$. Vậy thể tích khối tròn xoay bằng $V = \pi \int_{-2}^4 (9 - (x - 1)^2) dx = 36\pi$.

- Hình dạng đồ thị và diện tích

Ví dụ 1: Xác định công thức tính diện tích phần bôi đen trong phần đồ thị sau

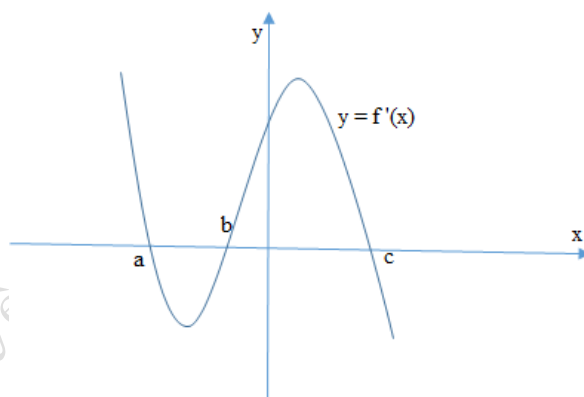


Đáp số: $\int_b^c f(x)dx - \int_a^b f(x)dx$

Hướng dẫn: áp dụng công thức $S = \int_a^c |f(x)|dx = \int_a^b |f(x)|dx + \int_b^c |f(x)|dx$. Phá dấu giá trị tuyệt đối ta được $S = \int_b^c f(x)dx - \int_a^b f(x)dx$

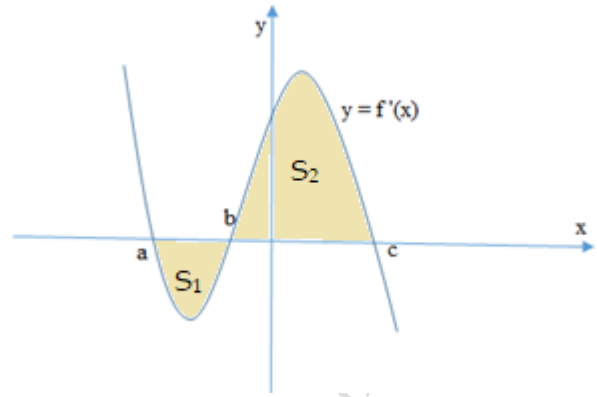
đối ta được $S = \int_b^c f(x)dx - \int_a^b f(x)dx$

Ví dụ 2: Cho đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hãy so sánh $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$



Đáp số: $f(c) > f(a) > f(b)$

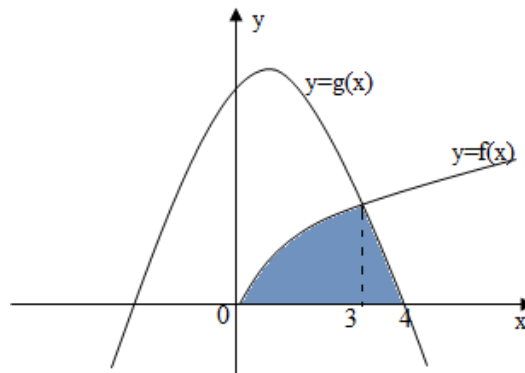
Hướng dẫn: Phần đồ thị nằm trên trục hoành ứng với $y > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$, phần nằm dưới trục hoành ứng với $y < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$. Như vậy nhìn vào đồ thị của $f'(x)$ ta xét dấu được $f'(x)$ từ đó suy ra hàm số đạt cực đại tại a và c , cực tiểu tại b (hoặc dựa vào sự đổi dấu từ + sang - của $f'(x)$ để biết cực đại, cực tiểu nhé!). Vậy $f(a), f(c) > f(b)$.



Chỉ còn phải so sánh $f(a)$ và $f(c)$. Ta có

$$\begin{aligned} f(c) - f(a) &= \int_a^c f'(x) dx = \int_a^b f'(x) dx + \int_b^c f'(x) dx \\ &= S_2 - S_1 > 0. \text{ Vậy } f(c) > f(a). \end{aligned}$$

Ví dụ 3: Xác định công thức tính diện tích phần tô đậm trong hình sau



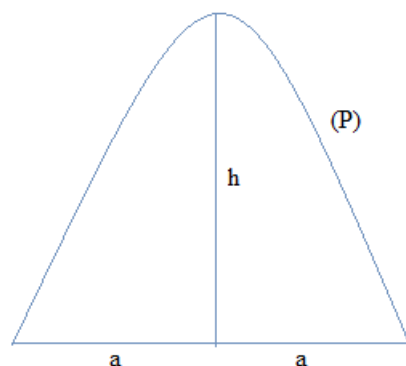
Đáp số: $\int_0^3 f(x) dx + \int_3^4 g(x) dx$

Hướng dẫn: Chia hình phẳng cần tính thành hai phần:

- (1) giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 0$ và $x = 3$.
- (2) giới hạn bởi đồ thị $y = g(x)$, $y = 0$, $x = 3$ và $x = 4$.

Vậy diện tích cần tính là tổng diện tích hai phần trên, do đó: $S = \int_0^3 f(x) dx + \int_3^4 g(x) dx$

Ví dụ 4: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parabol có kích thước như hình sau



Đáp số: $S = \frac{4}{3}ah$

Hướng dẫn: Dễ dàng lập được phương trình Parabol là $y = -\frac{h}{a^2}x^2 + h$. Vậy

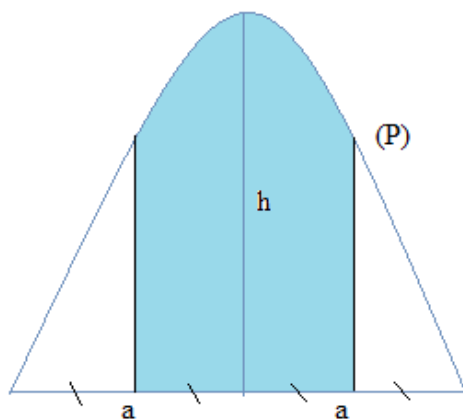
$$S = \int_{-a}^a \left(-\frac{h}{a^2}x^2 + h \right) dx = \frac{4}{3}ah.$$

Ví dụ 5: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi phần tô đậm trong hình sau

Đáp số: $S = \frac{11}{12}ah$

Hướng dẫn: Dễ dàng lập được phương trình Parabol là $y = -\frac{h}{a^2}x^2 + h$. Vậy

$$S = \int_{-a/2}^{a/2} \left(-\frac{h}{a^2}x^2 + h \right) dx = \frac{11}{12}ah.$$



- Toán ứng dụng

Ví dụ 1: Một vật đang chuyển động đều với vận tốc $30m/s$ thì chuyển động chậm dần đều với gia tốc $-70m/s^2$. Hỏi từ lúc giảm tốc đến khi dừng hẳn thì vật di chuyển được quãng đường bao xa?

Đáp án: $v(t) = 30 - 70t \Rightarrow v(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{7}$

Do đó quãng đường đi được là: $S = \int_0^{\frac{3}{7}} (30 - 70t) dt = \frac{45}{7} m$.

Ví dụ 2: Vật A chuyển động đều từ D với vận tốc $30m/s$ được 10s thì chuyển động chậm dần với gia tốc $-10m/s^2$. Sau khi vật A khởi hành được 8s thì vật B bắt đầu xuất phát cùng chiều từ D nhanh dần đều với gia tốc $50m/s^2$. Hỏi sau bao lâu kể từ lúc B khởi hành hai vật gặp nhau? Khi gặp nhau thì vật A đã dừng lại chưa?

Hướng dẫn: Gọi $t = 0$ là khi vật B khởi hành và hai vật gặp nhau sau $t_0 > 0$. Khi đó vật A chuyển động đều trong 2(s) và chậm dần đều trong $(t_0 - 2)(s)$ nếu $t_0 > 2$

- Xét vật A:

Vật A chuyển động thành 2 chặng: chặng 1 là chuyển động đều với vận tốc $30m/s$ trong 10s, quãng đường chặng này là $\int_0^{10} 30 dt = 300(m)$. Chặng thứ 2 là chuyển động chậm dần đều với thời gian $t_0 - 2$ cho đến khi gặp B, quãng đường mà A di chuyển được ở chặng này là $\int_0^{t_0-2} (-10t + 30) dt = -5(t_0 - 2)^2 + 30(t_0 - 2)$. Vậy tổng quãng đường mà vật A đi được từ D đến khi gặp nhau là $-5(t_0 - 2)^2 + 30(t_0 - 2) + 300$.

- Xét vật B: Vì vật B chuyển động nhanh dần với gia tốc $50m/s^2$ nên vận tốc của B là $v(t) = 50t + C$. Vì lúc bắt đầu khởi hành B có vận tốc bằng 0 nên $C = 0$. Vậy từ D đến khi gặp

A, vật B đi được $\int_0^{t_0} 50t dt = 25t_0^2$.

Hai vật gặp nhau khi quãng đường đi được như nhau:

Trường hợp 1: Gặp nhau khi $t_0 \leq 2$, lúc này vật A vẫn đang chuyển động đều, tương đương với phương trình:

$25t_0^2 = 30 \times 8 + \int_0^{t_0} 30dt \Leftrightarrow 25t_0^2 - 30t_0 - 240 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_0 = 3.756 > 2 \\ t_0 = -2.556 < 0 \end{cases}$. Cả 2 giá trị này không thỏa mãn.

Trường hợp 2: Gặp nhau khi $t_0 > 2$, ta có phương trình

$25t_0^2 = -5(t_0 - 2)^2 + 30(t_0 - 2) + 300 \Leftrightarrow x = 3.66666 = \frac{11}{3}$. Vậy hai vật thể gặp nhau sau 3.666 (s) kể từ khi vật B khởi hành.

- Vật A dừng lại khi $v(t) = 0 \Leftrightarrow -10t + 30 = 0 \Leftrightarrow t = 3(s)$ kể từ khi bắt đầu chuyển động chậm dần đều, tương đương với 5(s) kể từ khi vật B chuyển động. Vậy khi hai vật gặp nhau, vật A vẫn chưa dừng lại do $5 > 3.6666$.

Ví dụ 3: Một ô tô bắt đầu chuyển động nhanh dần đều với vận tốc $v_1(t) = 7t$ (m/s). Đi được 5(s) người lái xe gặp chướng ngại vật nên phải phanh gấp cho xe chạy chậm dần đều với gia tốc -70 (m/s²). Tính quãng đường đi được của ô tô từ lúc chuyển bánh đến khi dừng hẳn.

Đáp án: Quãng đường vật đi được trong 5s đầu tiên là: $S_1 = \int_0^5 7tdt = \frac{175}{2} m$

Từ thời điểm 5s vận tốc của vật tính theo công thức: $v(t) = 35 - 70t$ (m/s) $\Rightarrow v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0,5s$

Quãng đường oto đi được từ thời điểm 5s cho tới khi dừng hẳn là: $S_2 = \int_0^{0,5} 35 - 70tdt = \frac{35}{4} m$

Vậy quãng đường đi được của ô tô từ lúc chuyển bánh đến khi dừng hẳn là:

$$S = S_1 + S_2 = 96,25m.$$

Ví dụ 4: Một vật chuyển động với vận tốc thay đổi theo thời gian $v(t) = 3t + 2$ (m/s). Hỏi tại thời điểm $t = 30$ (s) thì vật đã đi được quãng đường bao nhiêu?

Đáp án: $S = \int_0^{30} 3t + 2dt = 1410m.$

Ví dụ 5: Một vật đang chuyển động với vận tốc 10(m/s) thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + t$ (m/s²). Hỏi sau 10(s) kể từ thời điểm tăng tốc, vật đã di chuyển được quãng đường bao nhiêu?

Đáp án: $S = \int_0^{10} (10 + t^2 + t) dt = \frac{1450}{3} m.$

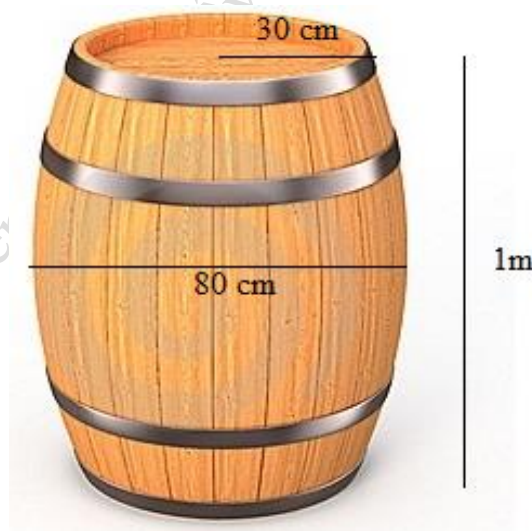
Ví dụ 6: Một vật đang chuyển động với vận tốc 10 (m/s) thì giảm tốc với gia tốc $a(t) = 4 - t \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng vật đi được khi thay đổi chuyển động đến khi vật tốc đạt giá trị lớn nhất?

Đáp án: Ta có $v(t) = 10 + (4 - t)t \Rightarrow v(t) \max \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow S = \int_0^2 10 + (4 - t) t dt = \frac{76}{3} m$

Ví dụ 7: Một đám vi trùng ngày thứ t có số lượng là N_t . Biết rằng $N'_t = \frac{4000}{1 + 0,5t}$ và lúc đầu đám vi trùng có 250.000 con. Sau 10 ngày số lượng vi trùng là (lấy xấp xỉ hàng đơn vị).

Đáp án : $N(10) = 250000 + \int_0^{10} \frac{4000}{1 + 0,5t} dt \approx 264334 \text{ con.}$

Ví dụ 8: Một thùng rượu có bán kính các đáy là 30cm, thiết diện vuông góc với trục và cách đều hai đáy có bán kính là 40cm, chiều cao thùng rượu là 1m (hình vẽ). Biết rằng mặt phẳng chứa trục và cắt mặt xung quanh thùng rượu là các đường parabol, hỏi thể tích của thùng rượu (đơn vị lít) xấp xỉ bao nhiêu?



Đáp án: Gắn hệ trục Oxy sao cho O là tâm đáy dưới, trục Ox hướng lên và vuông góc với mp đáy, trục Oy nằm trên mp đáy và vuông góc Ox.

Các đường xung quanh thùng rượu là các đường parabol.

Gọi đường parabol đó có dạng: $y = ax^2 + bx + c$

Theo bài ra ta có đường parabol này sẽ đi qua các điểm $(0;0,3), (0,5;0,4), (1;0,3)$

$$\text{Suy ra: } y = \frac{-2}{5}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{3}{10}$$

Thể tích thùng rượu chính là thể tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng

$$y = \frac{-2}{5}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{3}{10}; x=0; x=1$$

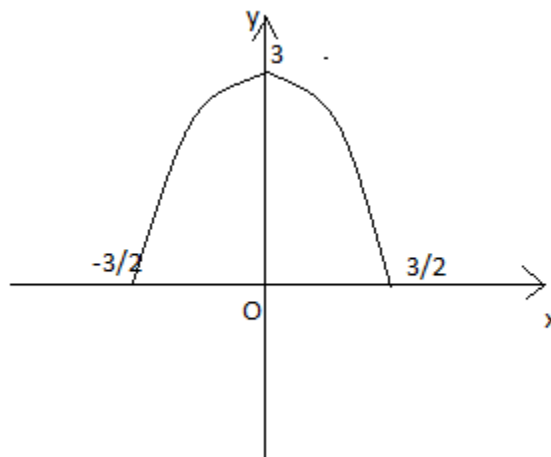
$$\Rightarrow V = \pi \int_0^1 \left(\frac{-2}{5}x^2 + \frac{2}{5}x + \frac{3}{10} \right)^2 dx = \frac{203\pi}{1500} (m^3) \approx 425,2(l)$$

Ví dụ 9: Một Chi đoàn thanh niên đi dự trại ở một đơn vị bạn, họ dự định dựng một lều trại có dạng parabol (nhìn từ mặt trước, lều trại được căng thẳng từ trước ra sau, mặt sau trại cũng là parabol có kích thước giống như mặt trước) với kích thước: nền trại là một hình chữ nhật có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét, đỉnh của parabol cách mặt đất là 3 mét. Hãy tính thể tích phần không gian phía trong trại theo m^3 .

Đáp án: Gắn hệ trục Oxy như hình vẽ.

Gọi pt parabol là $y = ax^2 + bx + c$, đi qua các điểm $A(0;3), B\left(-\frac{3}{2};0\right), C\left(\frac{3}{2};0\right)$

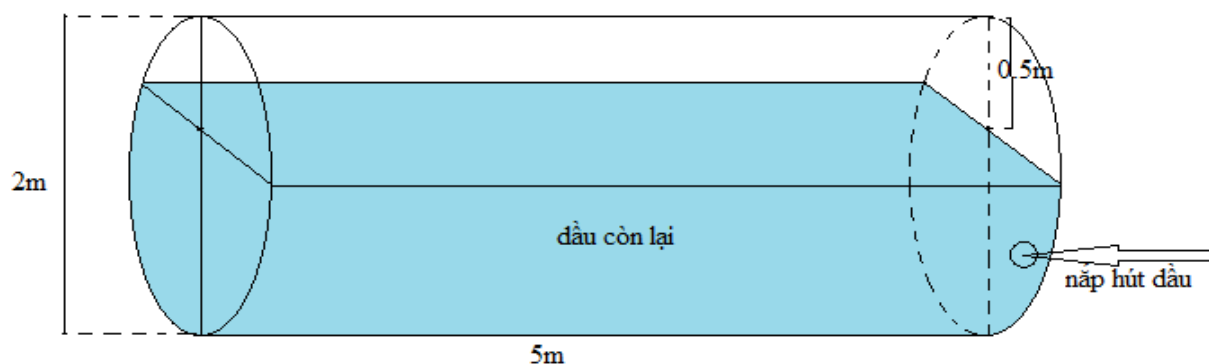
$$\text{suy ra } y = -\frac{4}{3}x^2 + 3$$



$$\text{Diện tích parabol là : } S = \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}} -\frac{4}{3}x^2 + 3 dx = 6.$$

Vậy thể tích phần không gian phía trong trại là: $V = 6.S = 36m^3$

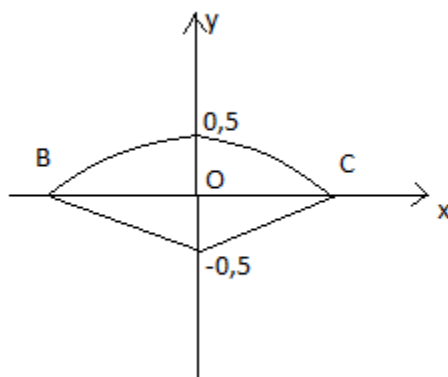
Ví dụ 10: Tính thể tích lượng dầu còn lại trong thùng?



Đáp án: Gắn hệ trục Oxy như hình vẽ.

Phương trình cung tròn là: $x^2 + (y + 0,5)^2 = 1 \Rightarrow y = -0,5 + \sqrt{1 - x^2}$

Do bán kính đường tròn là 1 nên $B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right), C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$



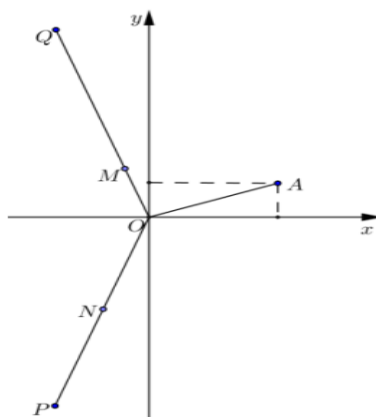
Diện tích cung tròn là: $S = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} -0,5 + \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

Do đó thể tích phần chứa dầu là: $V = \pi \cdot 1^2 \cdot 5 - 5 \cdot S = \frac{10\pi}{3} + \frac{5\sqrt{3}}{4} (\text{m}^3)$

4. SỐ PHỨC

a. Điểm biểu diễn số phức

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn : $|z| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và điểm A trong hình vẽ là một điểm biểu diễn số phức z . Hỏi điểm biểu diễn số phức $w = \frac{1}{iz}$ là điểm nào



A. Điểm Q

B. Điểm M

C. Điểm N

D. Điểm P

Hướng dẫn :

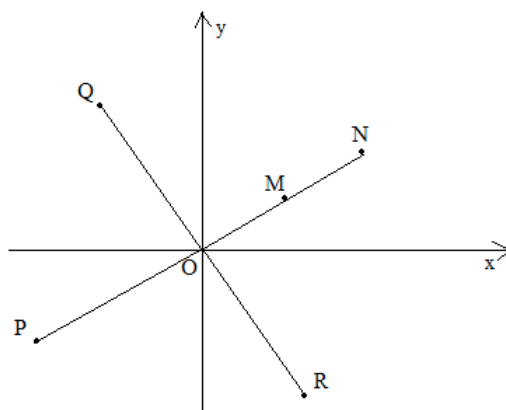
Cách 1 : Có $|w| = \frac{1}{|z|} = \sqrt{2} \Rightarrow |w| = 2|z|$, do đó khoảng cách từ điểm biểu diễn đến gốc tọa độ của w dài gấp 2 OA .

Mặt khác, $w = \frac{-i\bar{z}}{|z|^2} = \frac{-ai - b}{|z|^2}$ nên w có cả phần thực và phần ảo âm

nên P là điểm thỏa mãn.

Cách 2 : lấy đại một số phức z mà có phần thực và phần ảo dương, rồi tính w để tìm dấu của phần thực, phần ảo w .

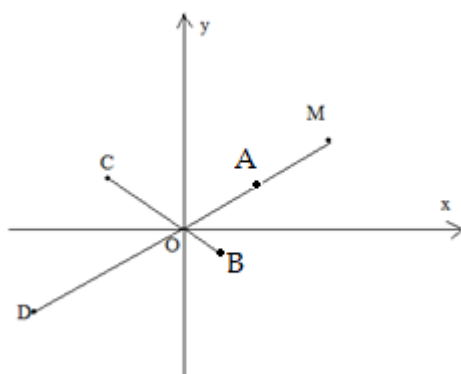
Ví dụ 2: Số phức z được biểu diễn bởi điểm M. Hỏi số phức $2z$ được biểu diễn bởi điểm nào trong các điểm N, P, Q, R.



Đáp số: N

Hướng dẫn: Số phức $2z$ biểu diễn bởi vec tơ bằng $2\overrightarrow{OM}$ nên N là điểm thỏa mãn.

Ví dụ 3: Cho số phức z có $|z| = 2$ được biểu diễn bởi điểm M. Điểm biểu diễn số phức $w = \frac{1}{z}$ được biểu diễn bởi điểm nào trong các điểm A, B, C, D?



Đáp số: B

Hướng dẫn: Có $|w| = \frac{1}{|z|} \Rightarrow |w| = \frac{1}{2} \Rightarrow |w| = \frac{1}{4}|z|$. Do đó B là điểm cần tìm do $OB = \frac{1}{4}OM$.

Chú ý: chúng ta có thể kiểm tra được chi tiết hơn nữa về dấu của phần thực, phần ảo của w .

Ví dụ 4: Cho số phức z thay đổi, luôn có $|z| = 2$. Khi đó tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = (1 - 2i)\bar{z} + 3i$ là:

A. Đường tròn $x^2 + (y - 3)^2 = 2\sqrt{5}$.

B. Đường tròn $x^2 + (y + 3)^2 = 20$.

C. Đường tròn $x^2 + (y - 3)^2 = 20$.

D. Đường tròn $(x - 3)^2 + y^2 = 2\sqrt{5}$.

Hướng dẫn: Cô lập z hoặc $\bar{z}$ sang một vế được: $w - 3i = (1 - 2i)\bar{z}$. Sau đó lấy mô đun hai vế ta được $|w - 3i| = |1 - 2i||z| = 2\sqrt{5}$. Vậy quỹ tích điểm biểu diễn w là đường tròn tâm $I(0; 3)$ bán kính $R = 2\sqrt{5}$. Vậy phương trình đường tròn là $x^2 + (y - 3)^2 = 20$.

Ví dụ 5: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z| = 3$. Biết rằng tập hợp tất cả các điểm biểu diễn số phức $w = 3 - 2i + (2 - i)z$ là một đường tròn. Hãy tính bán kính của đường tròn đó.

- A. $3\sqrt{2}$. B. $3\sqrt{5}$. C. $3\sqrt{3}$. D. $3\sqrt{7}$.

Hướng dẫn: Cô lập z sang một vế, rồi lấy mô đun hai vế ta có: $w - 3 + 2i = (2 - i)z \Rightarrow |w - 3 + 2i| = \sqrt{5}|z| \Rightarrow |w - 3 + 2i| = 3\sqrt{5}$. Vậy tập hợp biểu diễn w là đường tròn tâm $I(3; -2)$ bán kính $R = 3\sqrt{5}$.

Ví dụ 6: Trong mặt phẳng phức, Cho số phức z thỏa mãn $|z - 3 + 4i| = 2$ và $w = 2z + i - 1$. Tập hợp biểu diễn số phức w là đường tròn có tâm I , bán kính R . Tìm tọa độ tâm I và bán kính R .

- A. $I(3; -4), R = 2$ B. $I(5; -7), R = 4$ C. $I(4; -5), R = 4$ D. $I(7; -9), R = 4$

Hướng dẫn: Ta có $w = 2z + i - 1 \Rightarrow w + 1 - i = 2z \Rightarrow w + 1 - i + 2(-3 + 4i) = 2(z - 3 + 4i) \Rightarrow w - 5 + 7i = 2(z - 3 + 4i)$. Lấy mô đun 2 vế ta được $|w - 5 + 7i| = 2|z - 3 + 4i| \Rightarrow |w - 5 + 7i| = 4$. Vậy tập hợp điểm biểu diễn w là đường tròn tâm $I(5; -7)$ bán kính $R = 4$.

Ví dụ 7: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z - 3 + 4i| \leq 2$. Trong mặt phẳng Oxy tập hợp điểm biểu diễn số phức $w = 2z + 1 - i$ là hình tròn có diện tích:

- A. $S = 9\pi$. B. $S = 12\pi$. C. $S = 16\pi$. D. $S = 25\pi$.

Hướng dẫn: Ta có $w = 2z + 1 - i \Rightarrow w - 1 + i = 2z \Rightarrow w - 1 + i + 2(-3 + 4i) = 2(z - 3 + 4i) \Rightarrow w - 7 + 9i = 2(z - 3 + 4i)$. Lấy mô đun 2 vế ta được $|w - 7 + 9i| = 2|z - 3 + 4i| \Rightarrow |w - 7 + 9i| \leq 4$. Vậy tập hợp điểm biểu diễn w là hình tròn tâm $I(7; -9)$ bán kính $R = 4$. Vậy $S = 16\pi$.

Ví dụ 8: Cho thỏa mãn $z \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $(2 + i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + 1 - 2i$. Biết tập hợp các điểm biểu diễn cho số phức $w = (3 - 4i)z - 1 + 2i$ là đường tròn I , bán kính R . Khi đó.

- A. $I(-1; -2), R = \sqrt{5}$. B. $I(1; 2), R = \sqrt{5}$. C. $I(-1; 2), R = 5$. D. $I(1; -2), R = 5$.

Hướng dẫn: Từ $(2+i)|z| = \frac{\sqrt{10}}{z} + 1 - 2i \Rightarrow (2+i)|z|z = \sqrt{10} + (1-2i)z \Rightarrow z(2|z|-1+(|z|+2)i) = \sqrt{10}$
 $= \sqrt{10}$. Lấy mô đun 2 vế được $|z|\sqrt{(2|z|-1)^2 + (|z|+2)^2} = \sqrt{10} \Rightarrow |z|\sqrt{5(|z|^2+1)} = \sqrt{10}$
 $\Rightarrow |z|\sqrt{|z|^2+1} = \sqrt{2} \Rightarrow |z|^4 + |z|^2 - 2 = 0 \Rightarrow |z| = 1$.

Từ $w = (3-4i)z - 1 + 2i \Rightarrow w + 1 - 2i = (3-4i)z$ $|w+1-2i| = 5|z| = 5$. Vậy tập hợp điểm biểu diễn w là đường tròn tâm $I(-1; 2)$ bán kính $R = 5$.

b. Tổng bậc cao của số phức

Ví dụ 1: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình phức $3z^2 - 4z + 3 = 0$ với z_2 có phần ảo âm.

Tính $P = z_1^{2017} \cdot z_2^{2016}$

Đáp số: $P = \frac{2}{3} + \frac{5}{3}i$

Hướng dẫn: $P = z_1^{2017} \cdot z_2^{2016} = (z_1 z_2)^{2016} \cdot z_1 = z_1$ vì theo Viet $z_1 z_2 = 1$

Ví dụ 2: Gọi z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình phức $z^2 - 2z + 4 = 0$. Tính $P = z_1^{2017} + z_2^{2017}$.

Đáp số: $P = 2^{2017}$

Hướng dẫn: $z_1, z_2 = 1 \pm \sqrt{3}i \Rightarrow z_1^3 = z_2^3 = -8$. Vậy $P = 8^{672} (z_1 + z_2) = 8^{672} \cdot 2 = 2^{2017}$

Ví dụ 3: Tìm phần phần ảo của số phức sau: $1 + (1+i) + (1+i)^2 + (1+i)^3 + \dots + (1+i)^{200}$

A. $-2^{10} - 1$ B. $2^{10} - 1$ C. $-2^{100} + 1$ D. $2^{10} + 1$

Đáp số:

Hướng dẫn: Dùng công thức tổng n số hạng đầu của cấp số nhân. $S_n = u_1 \frac{(1+i)^n - 1}{i}$
 $= \frac{(1+i)^{201} - 1}{i} = \frac{(1+i)(2i)^{100} - 1}{i} = \frac{2^{100}(1+i) - 1}{i} = 2^{100}(1-i) + i = 2^{100} + (-2^{100} + 1)i$. Chú ý:
 $(1+i)^2 = 2i$

Ví dụ 4: Mô đun của số phức $z = 1 + (1-i) + (1-i)^2 + (1-i)^3 + \dots + (1-i)^{19}$ bằng:

A. $|z| = 20$ B. $|z| = 2^{10} + 1$ C. $|z| = 1$ D. $|z| = 2^{10} - 1$

Hướng dẫn: Đặt $q = 1 - i$ thì có thể áp dụng tổng cấp số nhân ta có $z = \frac{(1-i)^{20} - 1}{-i}$
 $= \frac{(-2i)^{10} - 1}{-i} = \frac{-2^{10} - 1}{-i} = (-1 - 2^{10})i \Rightarrow |z| = 2^{10} + 1$

Ví dụ 5: Tính $S = i + 2i^2 + 3i^3 + \dots + 2017i^{2017}$

Đáp số: $S = 1008 + 1009i$

Hướng dẫn: Có $iS = i^2 + 2i^3 + 3i^4 + \dots + 2016i^{2017} + 2017i^{2018} \Rightarrow S - iS$
 $= i + i^2 + i^3 + \dots + i^{2017} - 2017i^{2018} = i \frac{i^{2017} - 1}{i - 1} - 2017i^{2018} = i - 2017 \cdot (-1) = 2017 + i$. Vậy
 $S = \frac{2017 + i}{1 - i} = 1008 + 1009i$.

c. GTLN – GTNN của mô đun số phức

Ví dụ 1: Cho số phức z thỏa mãn: $|z + i + 1| = |\bar{z} - 2i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$

Đáp số: $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Hướng dẫn: Gọi $z = x + yi$ và M là điểm biểu diễn z . Thì giả thiết $|z + i + 1| = |\bar{z} - 2i| \Leftrightarrow$
 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = x^2 + (y+2)^2 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0$ (d). Vậy M chạy trên đường thẳng (d). Có
 $|z| = OM$ nên $\min |z| = \min OM = d(O, d) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ví dụ 2: Cho số phức z thỏa mãn: $|z - 3 + 4i| = 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$

Đáp số: 1

Hướng dẫn: Gọi M là điểm biểu diễn z thì giả thiết $|z - 3 + 4i| = 4 \Leftrightarrow M$ thuộc đường tròn tâm $I(3; -4)$ bán kính $R = 4$. Mặt khác $|z| = OM$ nên $|z|$ nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất. Vậy
 $\min OM = OI - R = 5 - 4 = 1$

Ví dụ 3: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 + 5| = 5, |z_2 + 1 - 3i| = |z_2 - 3 - 6i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z_1 - z_2|$

Đáp số: $\frac{5}{2}$

Hướng dẫn: Gọi M, N biểu diễn z_1, z_2 ta có:

M thuộc đường tròn tâm $I(-5;0)$ bán kính $R=5$. N thuộc đường trung trực (d) của AB với $A(-1;3)$ và $B(3;6)$. Dễ viết được phương trình (d) là: $4(x-1)+3\left(y-\frac{9}{2}\right)=0$. Vậy MN nhỏ nhất bằng $d(I,(d))-R = \frac{15}{2}-5 = \frac{5}{2}$.

Ví dụ 4: Xét số phức $z \neq 0$ thỏa mãn $z\sqrt{3z\bar{z}+1}=|z|(2+6iz)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** $\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{3}$. **B.** $\frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{2} < |z| < 1$. **D.** $|z| < \frac{1}{4}$.

Hướng dẫn: Cô lập z để lấy được mô đun 2 vế. Từ đó tính được $|z|$. Cụ thể, phương trình tương đương với $z\sqrt{3|z|^2+1}=|z|(2+6iz) \Leftrightarrow z\left(\sqrt{3|z|^2+1}-6|z|i\right)=2|z|$. Lấy mô đun 2 vế ta được $|z|\sqrt{3|z|^2+1+36|z|^2}=2|z| \Leftrightarrow |z|=\frac{1}{\sqrt{13}}$

Ví dụ 5 Cho số phức z thỏa mãn $|z-3-4i|=\sqrt{5}$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2$. Tính modun của số phức $w=M+mi$

- A.** $|w|=2\sqrt{314}$ **B.** $|w|=2\sqrt{309}$ **C.** $|w|=\sqrt{1258}$ **D.** $|w|=3\sqrt{137}$

Hướng dẫn: Biểu thức $P=|z+2|^2-|z-i|^2 \Leftrightarrow ax+by+c-P=0$ (d). Đường thẳng (d) có điểm chung với đường tròn $|z-3-4i|=\sqrt{5} \Leftrightarrow d(I,d) \leq R \Leftrightarrow m \leq P \leq M$

Ví dụ 6: Trong các số phức z thỏa mãn $|z+(2+4i)|=2$, gọi z_1 và z_2 là số phức có mô đun lớn nhất và nhỏ nhất. Tổng phần ảo của z_1 và z_2 bằng:

- A.** $8i$. **B.** 4 . **C.** -8 . **D.** 8 .

Hướng dẫn: Gọi M là điểm biểu diễn số phức z thì giả thiết $|z+(2+4i)|=2$ cho ta M chạy trên đường tròn tâm $I(-2;-4)$ bán kính $R=2$. Do đó, OM lớn nhất và nhỏ nhất tại giao điểm của OI với đường tròn. Phương trình đường OI : $y=2x$ hay $x=\frac{1}{2}y$. Thế vào phương

trình đường tròn ta được $\left(\frac{y}{2} + 2\right)^2 + (y+4)^2 = 4 \Leftrightarrow (y+4)^2 = \frac{16}{5} \Leftrightarrow y^2 + 8y + 16 - \frac{16}{5} = 0$.

Theo định lý Viet có $y_1 + y_2 = -8$. Vậy tổng phần ảo của z_1 và z_2 bằng -8 .

Ví dụ 7: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-1| = \sqrt{2}$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = |z+i| + |z-2-i|$.

A. $\max T = 8\sqrt{2}$. B. $\max T = 4$. C. $\max T = 4\sqrt{2}$. D. $\max T = 8$.

Hướng dẫn: Gọi I là tâm đường tròn $|z-1| = \sqrt{2}$ thì $I(1;0)$. Biểu thức T hiểu dưới dạng $T = MA + MB$ thì $A(0;-1)$ và $B(2;1)$ nên I là trung điểm của AB . Theo công thức trung tuyến:

$$MI^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4} \Rightarrow MA^2 + MB^2 = 8 > 0 \text{ (không đổi)}. \text{ Áp dụng bất đẳng thức}$$

Bunhiakovski $(MA + MB)^2 \leq 2(MA^2 + MB^2)$ tìm được giá trị lớn nhất của $T = MA + MB$ bằng 4.

Ví dụ 8: Cho số phức z thỏa mãn $|z| \leq 1$. Đặt $A = \frac{2z-1}{2+iz}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $|A| < \frac{2}{5}$. B. $\frac{2}{5} < |A| < \frac{5}{2}$. C. $|A| > \frac{5}{2}$. D. $|A| > \sqrt{6}$.

Hướng dẫn: Rút z theo A được $z = \frac{2A+1}{2-Ai} \Rightarrow |2A+1| \leq |2-Ai|$. Gọi $A = x + yi$ ta được:

$$\Rightarrow |2A+1| \leq |2-Ai| \text{ là phương trình hình tròn dạng } (2x+1)^2 + 4y^2 \leq (y+2)^2 + x^2$$

$$x^2 + y^2 + \frac{4}{3}x - \frac{4}{3}y - 1 \leq 0 \text{ tâm } I\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right), R = \frac{\sqrt{17}}{3}. \text{ Bài toán trở thành bài toán tìm GTLN,}$$

GTNN của $T = |A|$ với điểm biểu diễn A nằm trong hình tròn nên $|IO - R| \leq |A| \leq IO + R$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{17} - 2\sqrt{2}}{3} \leq |A| \leq \frac{\sqrt{17} + 2\sqrt{2}}{3}.$$

Ví dụ 9: Cho số phức z , tìm giá trị lớn nhất của $|z|$ biết rằng z thỏa mãn điều kiện

$$\left| \frac{-2-3i}{3-2i}z + 1 \right| = 1$$

A. 3. B. 2. C. 1. D. $\sqrt{2}$.

Hướng dẫn: Giả thiết $\left| \frac{-2-3i}{3-2i}z+1 \right| = 1 \Leftrightarrow |-iz+1| = 1 \Leftrightarrow |-i| \left| z + \frac{1}{-i} \right| = 1 \Leftrightarrow |z+i| = 1$. Do đó, nếu gọi M là điểm biểu diễn z thì M thuộc đường tròn tâm $I(0;-1)$ bán kính $R=1$. Vậy $\max|z| = \max OM = OI + R = 1+1=2$.

Ví dụ 10: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1+4-3i|=2$ và $|z_2+2-3i|=|z_2-1+2i|$. Tìm GTNN của $P=|z_1-z_2|$

Đáp số: $\min P = \frac{23}{\sqrt{34}} - 2$

Hướng dẫn: Gọi M, N biểu diễn z_1, z_2 ta có: M thuộc đường tròn tâm $I(-4;3)$ bán kính $R=2$. N thuộc đường trung trực (d) của AB với $A(-2;3)$ và $B(1;-2)$. Để viết được phương trình trung trực của AB là: $3\left(x+\frac{1}{2}\right)-5\left(y-\frac{1}{2}\right)=0$. Vậy MN nhỏ nhất bằng $d(I, (d)) - R$
 $= \frac{23}{\sqrt{34}} - 2$.

Ví dụ 11: Biết rằng số phức z thỏa mãn $u = (z+3-i)(\bar{z}+1+3i)$ là một số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

Đáp số: $2\sqrt{2}$

Hướng dẫn: Gọi $z = x + yi$, ta có $(z+3-i)(\bar{z}+1+3i) = ((x+3)+(y-1)i) \times ((x+1)+(-y+3)i)$. Tích này có phần ảo là $(x+3)(-y+3) + (y-1)(x+1)$. Phần ảo bằng 0
 $\Leftrightarrow 3x-3y+9-x+y-1=0 \Leftrightarrow x-y+4=0$ (d). Vậy nếu gọi M là điểm biểu diễn z thì M chạy trên đường thẳng (d).

Gọi $O(0;0)$ là điểm biểu diễn 0 thì $T = OM$. Giá trị T nhỏ nhất bằng khoảng cách từ O đến (d).

Vậy $\min T = \frac{|4|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Ví dụ 12: Cho số phức z thỏa mãn $\left| z + \frac{4i}{z} \right| = 2$. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $|z|$. Tính $M+m$?

A. $2\sqrt{5}$.

B. 2.

C. $\sqrt{5}$.

D. $\sqrt{13}$.

Hướng dẫn: Áp dụng bất đẳng thức: $\|z_1| - |z_2|\| \leq |z_1 + z_2|$. Dấu “=” xảy ra khi $z_1 = kz_2$ với $k < 0$.

Ta có: $\left| |z| - \frac{4}{|z|} \right| \leq \left| z + \frac{4i}{z} \right| = 2 \Rightarrow -2 \leq |z| - \frac{4}{|z|} \leq 2 \Rightarrow \begin{cases} |z|^2 - 2|z| - 4 \leq 0 \\ |z|^2 + 2|z| + 4 \geq 0 \end{cases}$. Giải hệ bất phương trình

này được $-1 + \sqrt{5} \leq |z| \leq 1 + \sqrt{5}$. Do bất đẳng thức đánh giá 1 lần nên đảm bảo dấu bằng xảy ra. Vậy $M + m = 2\sqrt{5}$.

Ví dụ 13: Cho 3 số phức z_1, z_2, z_3 phân biệt thỏa mãn $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 3$ và $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_3}$. Biết

z_1, z_2, z_3 lần lượt được biểu diễn bởi các điểm A, B, C trên mặt phẳng phức. Tính góc ACB ?

- A. 60° B. 90° C. 150° D. 120° .

Hướng dẫn: Gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn z_1, z_2, z_3 thì A, B, C nằm trong đường

tròn tâm O bán kính 3 (không quan trọng bán kính). Từ $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{z_3} \Rightarrow \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2} + \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{\overline{z_3}}{|z_3|^2}$

$\Rightarrow \overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_3}$, hay $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OC'}$ (với A', B', C' là điểm đối xứng của A, B, C qua Ox).

Có A', B', C' cùng thuộc đường tròn O mà $\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OC'}$ nên $OA'C'B'$ là hình bình hành và do đó là hình thoi. Mà đường chéo OC' bằng cạnh hình thoi nên đây là hình thoi đặc biệt với $A'C'B' = 120^\circ$. Vậy $ACB = 120^\circ$

Ví dụ 14: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 1 - 2i| + |z - 1 + 2i| = 6$. Tìm GTLN, GTNN của $P = |z|$

Hướng dẫn: Ta có $z_0 = 0$; $z_1 = -1 + 2i$; $z_2 = 1 - 2i$. Nên $z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$.

Tính $a = 6/2 = 3$; $2c = |z_1 - z_2| = 2\sqrt{5} \Rightarrow c = \sqrt{5}$. Vậy có ngay $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 2$.

Vậy $\max P = 3$ và $\min P = 2$.

Ví dụ 15: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|z + 2| + |z - 2| = 6$. Tìm GTLN, GTNN của $P = |z - 1 + i|$

Đáp số: Đang chờ bấm máy... (bài này mang tính chất giới thiệu)

Hướng dẫn: $|z + 2| + |z - 2| = 6$ là phương trình Elip dạng chính tắc với $a = 3$, $c = 2 \Rightarrow b = \sqrt{5}$

Vậy phương trình chính tắc của Elip là: $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{5}}{3} \sqrt{9-x^2}$

$$\text{Có } P^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2 = (x-1)^2 + \left(\pm \frac{\sqrt{5}}{3} \sqrt{9-x^2} + 1 \right)^2 = f_{1,2}(x)$$

Bấm TABLE trên máy Casio trên đoạn $[-3; 2]$ cho cả hai hàm $f_{1,2}(x)$ tìm được GTLN, GTNN của P^2 .

Ví dụ 16: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $|(1+i)z+1-2i| + |(1+i)z-1+2i| = 2\sqrt{5}$. Tìm GTLN, GTNN của $P = |z|$

Đáp số: $\min P = 0$ và $\max P = OF_1 = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

Hướng dẫn: Điều kiện giả thiết tương đương với $\left| z - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \right| + \left| z + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \right| = \sqrt{10} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{10}}{2}$

Tương tự Ví dụ 14 tính được $c = \frac{\sqrt{10}}{2}$. Vậy đây không phải Elip mà là đoạn thẳng F_1F_2 . Mà O

lại là trung điểm của F_1F_2 . Vậy $\min P = 0$ và $\max P = OF_1 = \frac{\sqrt{10}}{2}$

Ví dụ 17: Cho 2 số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1| = |z_2|$ và $|z_1 - z_2| = |z_2|$. Tính giá trị

$$P = \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 + \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^2$$

Đáp số: 1

Hướng dẫn: Vì biểu thức P chứa ẩn phụ là $z = \frac{z_1}{z_2}$ nên không nhất thiết phải tìm từng số

z_1, z_2 (thực tế không tìm được) mà chỉ cần tìm $\frac{z_1}{z_2}$.

Từ giả thiết ta có: $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = 1$ và $\left| \frac{z_1}{z_2} - 1 \right| = 1$. Gọi $z = \frac{z_1}{z_2} = x + yi$, ta có hệ:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Rất dễ giải được hệ phương trình này, ta được $z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

$$\text{Vậy } P = \left(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \mp \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^2 = 1$$

Ví dụ 18: Trong các cặp số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - (2 + 3i)z_2| = |z_2|$. Tìm số thực $k > 0$ lớn nhất sao cho $|z_1| = k|z_2|$.

Đáp số: $\sqrt{13} + 1$

Hướng dẫn: Đặt $z = \frac{z_1}{z_2}$. Bài toán tương đương với $|z - 2 - 3i| = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của

$P = |z|$. Dễ dàng giải được giá trị lớn nhất bằng $OI + R = \sqrt{13} + 1$, với I là tâm đường tròn $|z - 2 - 3i| = 1$.

Ví dụ 19: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $3|z + 2| + 4|z - 2| = 10$. Tìm GTNN của $|z|$

Đáp số: 1

Hướng dẫn:

Bài toán trở thành $3MA + 4MB = 10$, tìm GTLN, GTNN của OM . Trong đó, $A(-2;0)$, $B(2;0)$ và O là gốc tọa độ. Thấy rằng O là trung điểm của AB .

Áp dụng công thức đường trung tuyến ta có: $OM^2 = \frac{MA^2 + MB^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$. Áp dụng BĐT

bunhiakovski, ta có: $100 = (3MA + 4MB)^2 \leq (3^2 + 4^2)(MA^2 + MB^2) = 25(MA^2 + MB^2)$. Vậy

$MA^2 + MB^2 \geq 4$. Thay vào công thức trung tuyến được $OM^2 \geq 2 - 1 = 1$. Vậy $OM \geq 1$. Do đánh giá BDT một lần nên đảm bảo dấu “=” xảy ra. Vậy GTNN của $|z|$ bằng 1.

Ví dụ 20: Cho số phức z thỏa mãn điều kiện $3|z + i| + 4|z - i| = 10$. Tìm GTNN của $|z|$

Đáp số: 1

Hướng dẫn: Ngoài cách dùng công thức trung tuyến có thể dùng công thức sau

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \Rightarrow |z + i|^2 + |z - i|^2 = 2(|z|^2 + 1).$$

Theo BDT Bunhia có $100 = (3|z + i| + 4|z - i|)^2 \leq 25(|z + i|^2 + |z - i|^2) \Rightarrow 100 \leq 50(|z|^2 + 1)$

$$\Rightarrow |z|^2 \geq 1$$

Ví dụ 21: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 1, |z_1 + z_2| = 3$. Tìm GTLN của $T = |z_1| + |z_2|$

Đáp số: $\max P = \sqrt{10}$

Hướng dẫn: Áp dụng công thức $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \Rightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 = 5$. Áp dụng BĐT Bunhia ta có $T^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \leq 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \Rightarrow T^2 \leq 10$. Vậy $\max P = \sqrt{10}$

Ví dụ 22: Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn $|z_1 - z_2| = 2, z_1 + z_2 = 6 + 8i$. Tìm GTLN của $T = |z_1| + |z_2|$

Đáp số: $\max P = \sqrt{104}$

Hướng dẫn: Từ $z_1 + z_2 = 6 + 8i \Rightarrow |z_1 + z_2| = 10$. Áp dụng công thức $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \Rightarrow 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) = 104$. Áp dụng BĐT Bunhia ta có $T^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 \leq 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \Rightarrow T^2 \leq 104$. Vậy $\max P = \sqrt{104}$